BIAMOZ.com

محتوای ویژه کتاب

- آموزش مفاهیم در قالب چکیده درس
- پاسخ همهٔ تمرین‌های کتاب درسی
- ارزشیابی مستمر در پایان دروس با پاسخ وریز بارم
- آزمون تلفیقی پایان هر فصل با پاسخ و ریز بارم
- ✪ موارد مهم و سؤالات امتحانی
- آزمون‌های پایانی با پاسخ و ریز بارم

ریاضی

فصل ۱ مجموعه‌ها

درس ۱ معرفی مجموعه

چکیده درس:

نکته ۱: **یک دسته از اشیاء** متمایز و کاملاً مشخص **را یک** مجموعه می‌گویند. متمایز بودن اشیاء یعنی اینکه اشیاء تکراری نباشند و کاملاً مشخص بودن اشیاء یعنی اینکه دقیقاً بدانیم چه اشیائی درون مجموعه قرار می‌گیرند و چه اشیائی درون مجموعه قرار نمی‌گیرند. عضوهای مجموعه را درون { } (آکلاد) قرار می‌دهیم و آن را با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنیم.

مثال: عبارت «چهار عدد طبیعی و زوج کوچک‌تر از ۱۰» یک مجموعه را مشخص می‌کند ولی عبارت «چهار عدد زوج متوالی» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. زیرا کاملاً مشخص نیست که کدام عددهای زوج متوالی درون این مجموعه قرار می‌گیرند.

مثال: مجموعه حروف انگلیسی صدادار را A می‌نامیم و به صورت $A = \{a, e, i, u, o\}$ نشان می‌دهیم.

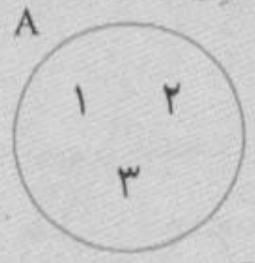
نکته ۲: جابه‌جایی عضوهای مجموعه مهم نیست. یعنی با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود.

مثال: $\{1,2,3\} = \{1,3,2\}$

نکته ۳: برای بیان عضویت یک شیء در یک مجموعه از علامت « $\in$ » و برای بیان عدم عضویت یک شیء در یک مجموعه از علامت « $\notin$ » استفاده می‌کنیم.

مثال: اگر $A = \{1,2\}$، $2 \in A$ یعنی «عدد ۲ عضو مجموعه A است.» و $3 \notin A$ یعنی «عدد ۳ عضو مجموعه A نیست.»

نکته ۴: برای نمایش مجموعه می‌توان از خطوط بسته نیز استفاده کرد. در این صورت می‌گوییم مجموعه را با نمودار ون نشان داده‌ایم.



نمودار ون ⟵ $A = \{1,2,3\}$

✪ نکته ۵: مجموعه‌ای را که هیچ عضوی ندارد، مجموعه تهی می‌نامند و با نماد $\varnothing$ نشان می‌دهند.

مثال: مجموعه عددهای اول کوچک‌تر از ۲، یک مجموعه تهی است، زیرا هیچ عدد اولی کوچک‌تر از ۲ نداریم.

فعالیت ۲

- شما شمارنده‌های مرکب عدد ۶۰ را به‌صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید.

BIAMOZ.com

- مجموعهٔ D شامل همهٔ شمارنده‌های دو رقمی عدد ۶۰ را تشکیل دهید؛ **این مجموعه چند عضو دارد؟** شش عضو دارد.

$D = \{۱۰,۱۲,۱۵,۲۰,۳۰,۶۰\}$

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعهٔ شامل ۳ شمارندهٔ زوج عدد ۶۰ را تشکیل دهند. احمد نوشت: {۴,۶,۱۰} و رضا نوشت: {۶,۱۰,۱۲}. **به نظر شما چرا جواب‌های آن‌ها با هم فرق دارد؟** چون کاملاً مشخص نیست منظور کدام عددهای زوج است.

فعالیت ۳

۱- کدام یک از عبارت‌های زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ مجموعهٔ مورد نظر را نمایش دهید.

الف) عددهای طبیعی و یک رقمی: $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

ب) چهار شاعر ایرانی: نمی‌توان یک مجموعه را مشخص کرد، چون نمی‌دانیم کدام چهار شاعر مد نظر است یعنی عضوهای مجموعه کاملاً مشخص نیست. (در قسمت (ب) عضوهای مجموعه مشخص نیستند.)

ج) دو عدد اوّلِ کوچک‌تر از ۱۲: نمی‌توان یک مجموعه را مشخص کرد، چون معلوم نیستند. کدام دو عدد اوّل کوچک‌تر از ۱۲ درون این مجموعه قرار دارند. یعنی عضوهای مجموعه کاملاً مشخص نیستند.

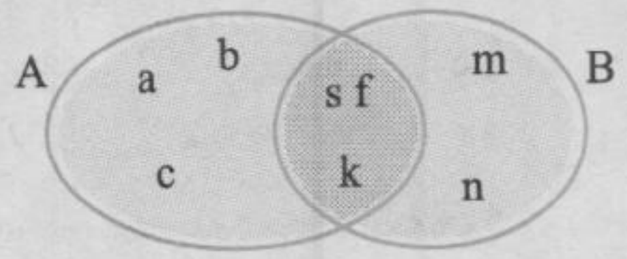
۲- با توجه به شرط متمایزبودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید:

الف) به جای $A = \{۱,۲,۱,۴,۵\}$ **باید بنویسیم:** $A = \{۱,۲,۴,۵\}$

ب) به دلیل تکراری بودنِ عدد ۵ در $B = \{۵,۶,۵,۷\}$ **آن را به‌صورت** $B = \{۵,۶,۷\}$ **می‌نویسیم.**

فعالیت ۳

۱- با توجه به نمودار ون، که برای دو مجموعه A و B رسم شده است، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.

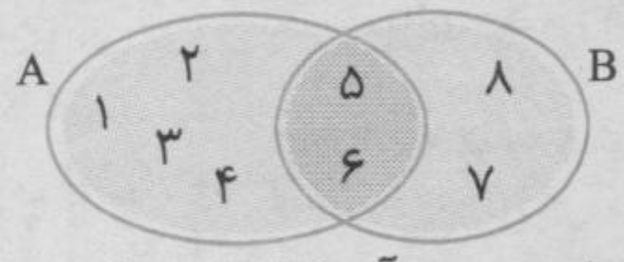


$A = \{a,b,c,s,f,k\}$

$B = \{s,f,k,m,n\}$

۲- دو مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ **و** $B = \{۵,۶,۷,۸\}$ **را در نظر بگیرید:**

دو مجموعه را با یک نمودار وِن نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بستهٔ مربوط به A و هم در منحنی بستهٔ B وجود دارد؟ اعداد ۵و۶ هم در منحنی بستهٔ مربوط به **A** و هم در منحنی بستهٔ **B** وجود دارند.



۳- مجموعهٔ عددهای دو رقمی و زوجِ اوّل را بنویسید و آن را E بنامید. این مجموعه چند عضو دارد؟ از آنجا که هر عدد زوج دو رقمی به جز ۱ و خودش بر عدد ۲ نیز بخش‌پذیر است پس، هیچکدام از عددهای زوج دو رقمی اول نیستند. بنابراین مجموعه E هیچ عضوی ندارد.

۴- کدام یک از عبارت‌های زیر، مجموعهٔ تهی را مشخص می‌کند؟

الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶: این عبارت مجموعه تهی را مشخص می‌کند.

ب) عددهای صحیح بین ۱- و ۱: این مجموعه شامل عضو صفر است. پس تهی نیست.

ج) عددهای اوّل و زوج: این مجموعه شامل عدد ۲ است، پس تهی نیست.

د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اوّل باشد: این مجموعه شامل عدد ۳ است، پس تهی نیست.

کار در کلاس ۴

۱- سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ تهی باشد؛ سپس عبارت‌های خود را با نوشته‌های هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

مجموعه عددهای صحیح بین ۷- و ۸- .

BIAMOZ.com

۲- سه عبارت بنویسید که هر کدام مشخص‌کنندهٔ مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد. (چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های یک عضوی می‌نامند.)

مجموعه عددهای طبیعی بین صفر و ۲ ← {۱}

مجموعه جواب‌های معادله $x+۱=۳$ ← {۲}

مجموعه حروف غیر عربی کلمه «تگرگ» ← {گ}

۳- عبارت‌هایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند، با علامت ✓ و بقیه را با علامت × مشخص کنید (با ذکر دلیل).

الف) چهار عدد فرد متوالی × یک مجموعه را مشخص نمی‌کند، چون عضوهای آن کاملاً مشخص نیستند.

ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲ ✓ ← {۲,۴,۶}

ج) عددهای اوّل کوچک‌تر از ۲۰ ✓ ← {۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹}

د) سه شهر ایران × ← یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. چون عضوهای آن کاملاً مشخص نیستند.

هـ) شمارنده‌های عدد ۲۴ ✓ ← {۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴}

و) ۵ عدد بزرگ × ← این عبارت یک مجموعه را مشخص نمی‌کند، چون کاملاً مشخص نیست چه اعدادی بزرگ محسوب می‌شوند و درون این مجموعه می‌توانند قرار بگیرند.

ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳ ✓ ← در واقع مجموعه تهی را مشخص می‌کند (∅).

۴- مانند نمونه کامل کنید.

۱) مجموعهٔ حروف الفبای فارسی A={الف ، ب ، پ ، ... ، ی} | ۱

۲) F = {۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹} | ۴

۳) مجموعهٔ عددهای صحیح بین ۲- و ۳- B = {۴,۸,۱۲,...} | ۷

۴) مجموعهٔ عددهای طبیعی و مضرب ۴ C: مجموعهٔ حروف a و b و عدد ۳ | ۶

۵) مجموعهٔ عددهای اوّل و یک رقمی D = {۵} | ۳

۶) مجموعه عددهای اوّل و مضرب ۵ E = {} | ۸

۷) {۳,a,b} F = {۲,۴,۶,۸} | ۲

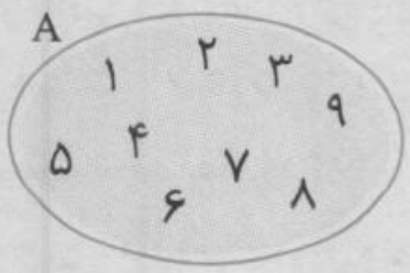
۸) {۶,۴,۲,۸} G: مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۲ و ۱۰ | ۵

H = {۲,۳,۵,۷}

۵- کدام یک از عبارت‌های زیر مشخص‌کنندهٔ یک مجموعه است؟ با نمودار وِن نشان دهید:

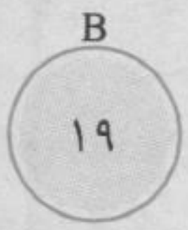
الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از ۱۰:

$A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$



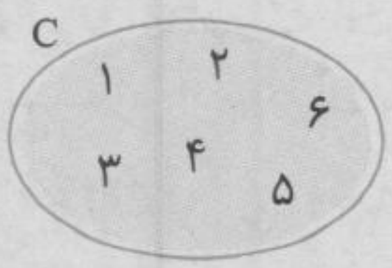
ب) شمارنده‌های اوّلِ عدد ۱۹:

$B = \{۱۹\}$



ج) عددهایی که شش وجه یک تاس معمولی مشخص می‌کند.

$C = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

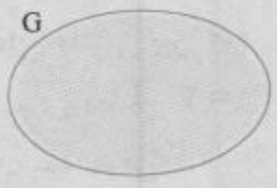


ریاضی

BIAMOZ.com

هـ) **چهار میوه خوشمزه:** این عبارت یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. چون عضوهای آن کاملاً مشخص نیست.

و) **عددهای منفی و بزرگ‌تر از یک:**



$G = \varnothing$

تمرین ۵

۱- متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید:

الف) $A = \{1,8,27,64,125\}$ ← مجموعه عددهای طبیعی مکعب کامل کوچک‌تر از ۱۳۰

ب) $C = \{10\}$ ← مجموعه کوچک‌ترین عدد طبیعی دو رقمی

ج) **عددهای طبیعیِ مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰۰** ← $A = \{3,6,9,\ldots,999\}$

د) **عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵** ← $\varnothing$ (مجموعه تهی)

هـ) **عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارند** ← $\varnothing$ (مجموعه تهی)

و) **عددهای اوّل دو رقمی که مضرب ۷ باشد** ← $\varnothing$ (مجموعه تهی)

۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند.

ب) مجموعهٔ $\{2,3,4,\cdots,9\}$ دارای ۸ عضو است.

ج) مجموعه $A = \{0,\varnothing\}$ دارای ۲ عضو است.

د) باتوجه به مجموعهٔ $A = \{3,5,7,9,11\}$: داریم: ۵ عضو A است یا با نماد ریاضی، $5 \in A$ و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی $12 \notin A$.

۳- سه مجموعهٔ متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آن باشد.

۱) $\{1,2,3,4,\cdots\}$ = مجموعه عددهای طبیعی

۲) $\{2,4,6,\cdots\}$ = مجموعه عددهای طبیعی زوج

۳) $\{2,3,5,7\}$ = مجموعه عددهای اوّل یک رقمی

ارزشیابی مستمر

۱- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۱ نمره)

«هر دسته از اشیاء ..... و کاملاً ..... را یک مجموعه می‌گوئیم.

۲- کدام عبارت یک مجموعه را مشخص می‌کند و کدام عبارت یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. چرا؟ (۲)

الف) جواب‌های معادلهٔ $3x - 2 = 1$

ب) انسان‌های روشنفکر

ج) ده عدد فرد سه رقمی

د) مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲

۳- کدام مجموعه مشخص کننده مجموعه تهی نیست؟ چرا؟ (۲)

الف) مجموعه همه‌ی عددهای صحیح که مربع آن‌ها منفی باشد.

ب) مجموعه عددهای طبیعی بین ۱۰۰ و ۱۰۱

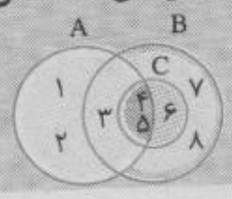
ج) مجموعه اعدادی که جذر آن‌ها برابر با خودشان باشد.

د) مجموعه اعدادی که هم مثبت و هم منفی باشند.

۴- مجموعه $A = \{1,2,\frac{4}{2},1,2^{0}\}$ **دارای چند عضو است؟ چرا؟ (۱)**

۵- آیا دو مجموعه $\{a,b,c\}$ **و** $\{c,a,b\}$ **با هم فرق دارند؟ چرا؟ (۱)**

۶- باتوجه به نمودار زیر مجموعه A و B و C را با اعضایشان مشخص کنید. (۳)



BIAMOZ.com

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ متمایز (۰/۵) – مشخص (۰/۵) ۲ الف) یک مجموعه است و این مجموعه دارای یک عضو می‌باشد. {۱} . (۰/۵) ب) یک مجموعه نیست. چون عضوهای آن کاملاً مشخص نیستند. (۰/۵) ج) یک مجموعه نیست. چون عضوهای آن کاملاً مشخص نیستند. (۰/۵) د) یک مجموعه است. {۱,۲,۳,۴,۶,۱۲} . ۳ الف) مجموعه تهی است. زیرا مربع هیچ عددی منفی نیست. (۰/۵) ب) مجموعه تهی است. چون بین ۱۰۰ و ۱۰۱ عددی طبیعی نداریم. (۰/۵) ج) این مجموعه تهی نیست. زیرا دارای عضوهای صفر و یک است. (۰/۵) د) این مجموعه تهی است. زیرا هیچ عددی هم مثبت و هم منفی نیست. (۰/۵) ۴ این مجموعه دارای ۲ عضو است (۰/۵) یعنی $A=\{1,2\}$ زیرا $\frac{4}{2}=2$ و $2^0=1$ و اینکه تکرار عضو در مجموعه مجاز نیست. ۵ خیر (۰/۵) فرقی ندارند. زیرا جابجایی عضوها یک مجموعه جدید ایجاد نمی‌کند. (۰/۵)

۶ $C=\{4,5,6\}$ و $B=\{3,4,5,6,7,8\}$ و $A=\{1,2,3,4,5\}$ (۱)

۲ درس مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

چکیده درس:

نکته ۶: می‌گوییم دو مجموعه A و B با هم برابرند، هرگاه همه عضوهایشان یکسان باشند. به عبارت دیگر می‌گوییم دو مجموعه A و B برابرند هرگاه هر عضو A در B باشد و هر عضو B نیز در A باشد. در صورتی که A با B برابر باشد می‌نویسیم $A=B$ و در صورتی که A و B برابر نباشند می‌نویسیم، $A\neq B$.

مثال: دو مجموعه $A=\{1,2,-\sqrt{4}\}$ و $B=\{1,\sqrt{4},-2\}$ با هم برابرند زیرا $\sqrt{4}=2$ و $-\sqrt{4}=-2$.

نکته ۷: می‌گوییم مجموعه A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B است و می‌نویسیم $A\subseteq B$ هرگاه هر عضو مجموعه A درون مجموعه B نیز موجود باشد. اگر A زیرمجموعه B نباشد می‌نویسیم $A\not\subseteq B$.

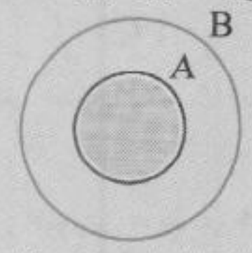
مثال: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ در این صورت $A\subseteq B$.

مثال: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2,4,5\}$ در این صورت $A\not\subseteq B$. زیرا عدد ۳ در A هست ولی در B نیست.

نکته ۸: هر مجموعه زیرمجموعه خودش است. یعنی $A\subseteq A$.

نکته ۹: مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است یعنی $\emptyset\subseteq A$.

نکته ۱۰: اگر A زیرمجموعه B باشد، در این صورت نمایش A و B با نمودار ون به صورت زیر است:

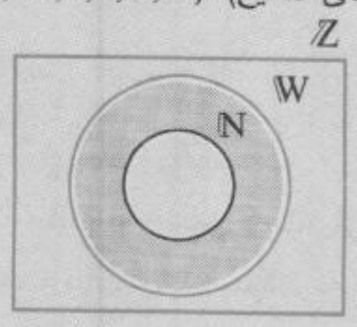


نکته ۱۱: مجموعه‌های اعدادی که کاربرد زیادی دارند به صورت زیر نام‌گذاری و نمایش داده می‌شوند.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ (مجموعه اعداد طبیعی)

$\mathbb{W}=\{0,1,2,\cdots\}$ (مجموعه عددهای حسابی)

$\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ (مجموعه عددهای صحیح)



نکته ۱۲: می‌توان برخی از مجموعه‌ها را به جای نشان دادن با عضوها، با نمادهای ریاضی نشان داد و مشخص کرد. برای این کار باید ابتدا یک ویژگی مشترک برای عضوهای این مجموعه‌ها یافت و سپس آن ویژگی مشترک را با متغیر یا متغیرهایی بیان کرد. سپس باید مشخص کنیم این متغیرها عضو چه مجموعه‌ای هستند.

مثال: مجموعه A را با نمادهای ریاضی و مجموعه B را با عضوهایش مشخص کنید.

$A=\{-3,-2,-1,0,1,2\}=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-3\leq x\leq 2\}$

$B=\{2k-1\,|\,k\in\mathbb{Z}\ ,\ k<3\}=\{3,1,-1,-3,\cdots\}$

نکته ۱۳: مجموعه عددهای گویا را نمی‌توان با نمایش عضوها مشخص کرد، بنابراین این مجموعه را با نماد ریاضی معرفی و با حرف Q نام‌گذاری می‌کنیم.

$Q=\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ b\neq 0\}$

نکته ۱۴: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq Q$

نکته ۱۵: اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر با 2^n است.

مثال: اگر مجموعه‌ای دارای ۴ عضو باشد تعداد زیر مجموعه‌های آن چندتا است؟

$n=4\Rightarrow 2^4=16\Rightarrow$ ۱۶ زیر مجموعه

BIAMOZ.com

فعالیت

۶

۱- جدول عددهای صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطرِ آن برابر ۱۲ شود، سپس مجموعهٔ عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

۱۰	-۱۰	۱۲
۶	۴	۲
-۴	۱۸	-۲

$A = \{۶, ۴, ۲\}$

اکنون مجموعهٔ B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ $B = \{۲, ۴, ۶\}$ ، سه عضو

آیا هر عضو A در مجموعهٔ B است؟ بله

آیا هر عضو B در مجموعهٔ A است؟ بله

۲- مجموعهٔ A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است.

ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است:

فرض کنیم عدد کوچک‌تر x باشد. پس عددهای دوم و سوم $x+۱$ و $x+۲$ خواهند بود.

$$x + (x+۱) + (x+۲) = ۲۷ \Rightarrow ۳x + ۳ = ۲۷$$
$$\Rightarrow ۳x = ۲۷ - ۳$$
$$\Rightarrow ۳x = ۲۴$$
$$\Rightarrow x = \frac{۲۴}{۳} = ۸ \Rightarrow A = \{۸, ۹, ۱۰\}$$

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰: $\{۷, ۸, ۹\} \leftarrow$ با A برابر نیست.

ب) مجموعهٔ عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱: $\{۸, ۹, ۱۰\} \leftarrow$ با A برابر است.

ج) مجموعهٔ سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر باشد. $\{۸, ۹, ۱۰\} \leftarrow$ با A برابر است.

کار در کلاس

۶

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشد:

الف)

$$\left\{۵, -۳, \frac{۲}{۵}, ۴, \frac{۹}{۳}\right\} = \left\{\frac{۲}{۵}, ۳, \frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}, ۴, \sqrt{۲۵}\right\}$$

توجه کنید که $\frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲} = \frac{-۱۲}{۴} = -۳$ و $\sqrt{۲۵} = ۵$ و $\frac{۹}{۳} = ۳$. بنابراین عدد ۳- به مجموعه سمت چپ و عدد ۴ به مجموعه سمت راست باید اضافه شود.

ب)

$$\left\{۷, \frac{۴}{۱۰}, \sqrt{\frac{۴}{۹}}, -\frac{۱}{۲}, -۲, ۰/۶۲۵\right\} = \left\{\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۵}, -۰/۵, \frac{۵}{۸}, ۷, -۲\right\}$$

توجه کنید که $\sqrt{\frac{۴}{۹}} = \frac{۲}{۳}$ و $۰/۶۲۵ = \frac{۶۲۵}{۱۰۰۰} = \frac{۵}{۸}$ و $\frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$ و $\frac{-۱}{۲} = -۰/۵$. بنابراین به مجموعه سمت چپ، عدد ۲- و به مجموعه سمت راست، عدد ۷ باید اضافه شود.

۲- دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

$A = \{۲, ۳, ۴\}$, $B = \{\sqrt{۴}, -(-۳), ۲^۲\}$

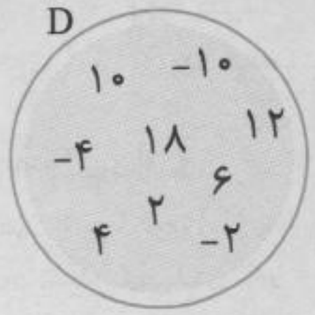
می‌دانیم که $\sqrt{۴} = ۲$ و $۲^۲ = ۴$ و $-(-۳) = ۳$. پس هر عضو A در B و هر عضو B در A موجود است. پس در واقع دو مجموعه A و B مساوی‌اند.

نتیجه: طبق پاسخ‌های دوستانمان نتیجه می‌گیریم که دو مجموعه B و A در صورتی مساوی هستند که هر عضو A در B و هر عضو B در A موجود باشد.

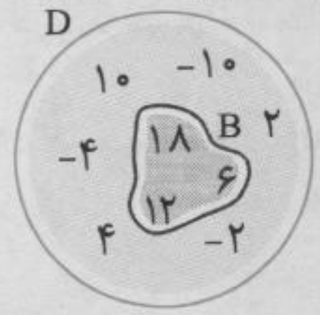
BIAMOZ.com

فعالیت ۷

مجموعه عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای مجموعهٔ D را در نمودار وِن روبه‌رو بنویسید:



در نمودار بالا، عضوهایی که بر ۳ بخش‌پذیر است با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.



مجموعهٔ B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز است؟ $B=\{۱۲,۱۸,۶\}$

بله هر عضو از B عضوی از D است.

در مجموعهٔ D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا $D=C$ ؟

$C=\{۱۰,-۱۰,-۴,۴,۲,-۲,۶,۱۲,۱۸\}$. بله $D=C$ است.

آیا مجموعهٔ C زیر مجموعهٔ D است؟ بله

اکنون زیرمجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشند؛ نام دیگر این مجموعه چیست؟

{} - مجموعه تهی ($\varnothing$)

آیا عبارت $\{۱۰,۴,-۶,۲\} \subseteq D$ درست است؟ چرا؟ خیر - زیرا هر عضو مجموعهٔ $\{۱۰,۴,-۶,۲\}$ عضوی از مجموعه D نیست. به بیان دقیق‌تر عدد ۶- عضو این مجموعه است ولی در مجموعه D وجود ندارد.

آیا در مجموعهٔ تُهی عضوی هست که در مجموعهٔ دلخواهی مانند A نباشد؟ خیر - زیرا مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد.

کار در کلاس ۸

۱- باتوجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$C \not\subseteq A$ ← نادرست است. زیرا تمام عضوهای A حتماً در مجموعه C نیز وجود دارند.

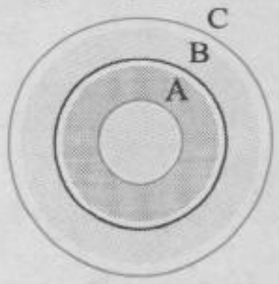
$B \subseteq A$ ← نادرست است. زیرا طبق شکل B عضوهایی دارد که در A نیستند.

$C \not\subseteq A$ ← درست است. زیرا C به جز عضوهای A، عضوهای دیگری نیز دارد.

$\varnothing \subseteq A$ ← درست است. زیرا ϕ هیچ عضوی ندارد که در A وجود نداشته باشد.

$B \subseteq C$ ← درست است. زیرا همهٔ عضوهای B حتماً درون C نیز موجودند.

$A \subseteq B$ ← درست است. زیرا هر عضو A حتماً عضوی از B نیز هست.



۲- مجموعه‌های A، B و C را در نظر بگیرید، سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (با ذکر دلیل)

$A=\{۱,۳,۶,۴\}$, $B=\{۵,۱,۳\}$, $C=\{۲,۵,۱,۳,۶\}$

$B \not\subseteq A$ ← درست است. زیرا عدد ۵ در B هست ولی در A نیست.

$B \subseteq ۳$ ← نادرست است. زیرا عدد ۳ یک مجموعه نیست. درست آن است که بنویسیم $۳ \in B$.

$B \subseteq A$ ← نادرست است. زیرا عددهای ۴ و ۶ در B نیستند در حالی که در A موجودند.

BIAMOZ.com

$C \subseteq B$ ← درست است. زیرا هر سه عدد ۳ و ۱ و ۵ در C نیز موجودند.

$C \not\subseteq A$ ← درست است. زیرا عدد ۴ عضو A است ولی در C نیست.

$۲ \in A$ ← نادرست است. زیرا عدد ۲ در مجموعه A وجود ندارد.

$\{۱,۴\} \in A$ ← نادرست است. زیرا عضوی چون $\{۱,۴\}$ در مجموعه A وجود ندارد. درست آن است که بنویسیم $\{۱,۴\} \subseteq A$.

$۶ \notin A$ ← نادرست است. زیرا عدد ۶ درون A موجود است.

$\{۵,۶\} \subseteq C$ ← درست است. زیرا هر دو عضو ۶ و ۵ درون مجموعه C نیز موجودند.

$۵ \in C$ ← درست است. زیرا عدد ۵ عضو مجموعه C است.

$A \subseteq ۰$ ← نادرست است.

مثال: همهٔ زیرمجموعه‌های $A = \{a,b,c\}$ در زیر نوشته شده است.

$$\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$$

مانند مثال قبل، تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲ $= \{۱۰,۱۱\}$

زیرمجموعه‌ها: $\emptyset,\{۱۰\},\{۱۱\},\{۱۰,۱۱\}$

ب) $\{a,b,c,d\}$

زیرمجموعه‌ها:

$\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{a,c,d\}$ و $\{a,b,c,d\}$

کار در کلاس ۱۰

مجموعه‌های زیر را با عضوها مشخص کنید:

الف) مجموعهٔ عددهای صحیح فرد. $\{...,-۵,-۳,-۱,۱,۳,۵,...\}$

ب) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۵ \le x < ۵\}$ $\quad A = \{-۵,-۴,...,۴\}$

ج) $B = \{۳k+۲ \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\left.\begin{array}{l} k=-۲ \Rightarrow ۳k+۲ = ۳(-۲)+۲ = -۴ \\ k=-۱ \Rightarrow ۳k+۲ = ۳(-۱)+۲ = -۱ \\ k=۰ \Rightarrow ۳k+۲ = ۳(۰)+۲ = ۲ \\ k=۱ \Rightarrow ۳k+۲ = ۳(۱)+۲ = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow B = \{...,-۴,-۱,۲,۵,...\}$$

تمرین ۱۰

۱- مجموعهٔ $A = \{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم برابر است؟

ابتدا عضوهای هر مجموعه را مشخص می‌کنیم:

$$B = \{x \mid x \in A, x^۲ \le ۲\} = \{-۱,۰,۱\}$$

$$C = \{x \mid x \in A, -۱ \le x \le ۱\} = \{-۱,۰,۱\}$$

$$D = \{x \mid x \in A, x^۴ = ۱\} = \{-۱,۱\}$$

طبق عضوهای سه مجموعه واضح است که دو مجموعه B و C با هم برابرند. یعنی $B = C$. اما $D \neq C$ و $D \neq B$.

۲- سه مجموعه مانند A و B و C بنویسید به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$ ؟

$$\left.\begin{array}{l} A = \{۱,۲,۳\} \\ B = \{۱,۲,۳,۴\} \\ C = \{۱,۲,۳,۴,۵\} \end{array}\right\} \rightarrow A \subseteq C$$

بله با توجه به سه مجموعه A و B و C می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آنگاه حتماً $A \subseteq C$.

BIAMOZ.com

۳- تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

الف) $A=\{x \mid x\in \mathbb{N}, 2x+1=3\}$

$2x+1=3\Rightarrow 2x=3-1\Rightarrow 2x=2\Rightarrow \boxed{x=1}\Rightarrow A=\{1\}$

با توجه به مجموعهٔ A زیرمجموعه‌های آن عبارتند از: $\varnothing$, A .

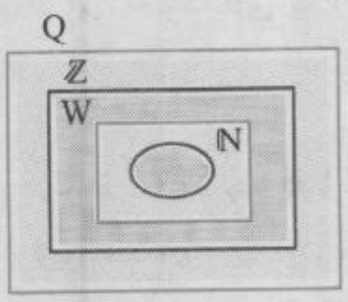
ب) $B=\{2x \mid x=0,2,3\}$

$B=\{0,4,6\}$

زیرمجموعه‌های B عبارتند از:

$\varnothing,\{0\},\{4\},\{6\},\{0,4\},\{0,6\},\{4,6\},\{0,4,6\}$

۴- نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های $\mathbb{N},W,Q$ و $\mathbb{Z}$ را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری کنید و با علامت $\subseteq$ با هم مقایسه کنید.



$\mathbb{N}\subseteq W\subseteq \mathbb{Z}\subseteq Q$

۵- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید:

الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. نادرست است. زیرا $\frac{1}{2}$ عددی گویاست که در مجموعه عددهای حسابی نیست.

ب) هر عدد حسابی عددی گویا است. درست است. زیرا هر عدد حسابی a به‌صورت $\frac{a}{1}$ قابل نوشتن است، پس گویا نیز هست.

ج) هر عدد صحیح عددی گویا است. درست است. زیرا هر عدد صحیح a به‌صورت $\frac{a}{1}$ قابل نوشتن است، پس گویا نیز هست.

د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است. درست است. عددهای گویایی که در آن‌ها صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد، عدد صحیح هستند.

ارزشیابی مستمر

۱- مجموعه $A=\{1,2,3,4\}$ با کدام مجموعه برابر است؟ (۱ نمره)

الف) $B=\left\{3^0,\sqrt{9},2^2,\frac{6}{3}\right\}$ $\quad C=\left\{\frac{\sqrt{4}}{2},(-1)^3,(-2)^2,3\right\}$

۲- جای حروف انگلیسی عدد مناسب بنویسید تا تساوی برقرار شود. (۲)

$$\left\{\frac{3}{5},-\sqrt{16},\frac{(-3)^2}{9},A,B\right\}=\left\{-1,C,D,\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}},(-2)^2\right\}$$

۳- همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه $A=\{m,n\}$ را بنویسید. (۱)

۴- یک مجموعه $(n-2)$ عضوی دارای ۳۲ زیرمجموعه است. n را بیابید. (۱)

۵- آیا هر مجموعه‌ای حداقل دو زیرمجموعه را داراست؟ چرا؟ (۱)

۶- آیا مجموعه $\{1,2,3,4\}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی عددهای زوج یک رقمی است؟ چرا؟ (۱)

۷- اگر $A\subseteq B$ باشد، با رسم یک نمودار وِن مناسب وضعیت A و B را نشان دهید. (۱)

۸- صورت دیگر مجموعه‌های زیر را بنویسید. (با عضوها یا با نمادهای ریاضی) (۲)

$A=\{5x-2 \mid x\in \mathbb{N}\}=$

$B=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}=$

BIAMOZ.com

۱ این مجموعه با مجموعه (الف) برابر است (۰/۲۵) زیرا $۳^۰=۱$ و $\sqrt{۹}=۳$ و $۲^۲=۴$ و $\frac{۶}{۳}=۲$ (۰/۲۵)

مجموعه A با مجموعه C برابر نیست (۰/۲۵) زیرا $(-۱)^۳=-۱$ و این عضو در مجموعه A وجود ندارد در حالی که در مجموعه C وجود دارد. (۰/۲۵)

۲ $A=۴ \quad , \quad B=-۱ \quad , \quad C=-۴ \quad , \quad D=۱$
(۰/۵) (۰/۵) (۰/۵) (۰/۵)

۳ $\varnothing \quad , \quad \{m\} \quad , \quad \{n\} \quad , \quad \{m,n\}$
(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۴ می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه برابر است با ۲^k که در آن k تعداد عضوهای مجموعه است.

پس داریم:

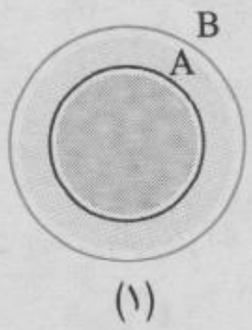
$$۲^{n-۲}=۳۲ \Rightarrow ۲^{n-۲}=۲^۵ \Rightarrow n-۲=۵ \Rightarrow n=۷$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۵ خیر (۰/۵) – زیرا مجموعه تهی فقط دارای یک زیرمجموعه است. (۰/۵)

۶ خیر (۰/۵) – زیرا عددهای ۳ و ۱ در مجموعه عددهای زوج یک رقمی وجود ندارند. (۰/۵)

مجموعه عددهای زوج یک رقمی $=\{۲,۴,۶,۸\}$

۷



(۱)

۸

(۱) $A=\{۵x-۲ \mid x\in \mathbb{N}\}=\{۳,۸,۱۳,۱۸,\cdots\}$

(۱) $B=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}=\{x \mid x\in \mathbb{Z} \ , \ -۴\le x\le ۲\}$

۳ درس اجتماع، اشتراک و تفاضلِ مجموعه‌ها

چکیده درس

نکته ۱۶: اگر A و B دو مجموعه باشد، اشتراک دو مجموعه A و B را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم. این مجموعه شامل همهٔ عضوهای مشترک A و B است.

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \ \text{و} \ x\in B\}$$

نکته ۱۷: اگر A و B دو مجموعه باشند. اجتماع دو مجموعه A و B را با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم. این مجموعه شامل عضوهایی است که این عضوها حداقل در یکی از مجموعه‌های A یا B موجود باشند.

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \ \text{یا} \ x\in B\}$$

نکته ۱۸: اگر A و B دو مجموعه باشند، تفاضل مجموعه B از مجموعه A را با نماد $A-B$ نشان می‌دهیم. این مجموعه شامل همهٔ عضوهایی از مجموعه A است که در مجموعه B نباشند.

$$A-B=\{x \mid x\in A \ \text{و} \ x\notin B\}$$

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۱,۳,۵\}$. $A\cap B$ و $A\cup B$ و $A-B$ و $B-A$ را با عضوهایشان مشخص کنید.

$$A\cap B=\{۱,۳\} \ , \ A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$$
$$A-B=\{۲,۴\} \ , \ B-A=\{۵\}$$

نکته ۱۹: اگر A یک مجموعه باشد، تعداد عضوهای A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم. مثلاً اگر $A=\{a,b\}$ در این صورت $n(A)=۲$.

مثال: اگر $A=W-N$ و $B=\mathbb{Z}-Q$، A و B و $n(A)$ و $n(B)$ را مشخص کنید.

$$A=W-\mathbb{N}\Rightarrow A=\{۰\}\Rightarrow n(A)=۱$$
$$B=\mathbb{Z}-Q\Rightarrow B=\varnothing\Rightarrow n(B)=۰$$

BIAMOZ.com

فعالیت ۱۱

۱- در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمّد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند.

الف) اگر مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار وِن نمایش دهید و سپس با عضوهایشان بنویسید.



{رضا و علی و فرشید و سامان و حسین و احسان}=V

{رضا و علی و محمد و سبحان و حسن و کیوان}=F

ب) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید. {رضا و علی}

ج) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند بنویسید.

{محمد و کیوان و حسن و سبحان و حسین و احسان و فرشید و سامان و رضا و علی}

۲- دو مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x\leq 6\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid -2\leq x\leq 3\}$ را در نظر بگیرید و مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

الف) $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

ب) $B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$

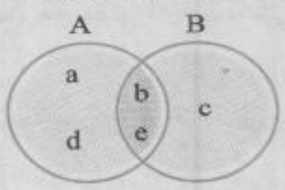
ج) مجموعهٔ عددهایی که در هر دو مجموعهٔ A و B هست $\{1,2,3\}$ **(این مجموعه را اشتراک A و B می‌نامیم و با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم.)**

د) مجموعهٔ عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B هست. $\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ **(این مجموعه را اجتماع A و B می‌نامیم و با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم.)**

فعالیت ۱۲

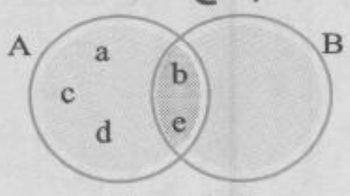
۱- دو مجموعهٔ $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$ و $A\cap B=\{b,e\}$ را در نظر بگیرید. از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده است که باتوجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را با نمودار وِن نمایش دهند. پاسخ چهار دانش‌آموزِ این کلاس را در زیر می‌بینید:

الف) دربارهٔ درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.



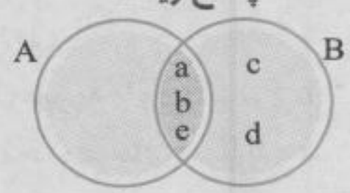
پاسخ حمیده

پاسخ حمیده درست است. زیرا طبق این نمودار ون b و e به هر دو مجموعه A و B تعلق دارند و همچنین عضوهایی که حداقل عضو یکی از دو مجموعه A یا B باشند عبارتند از a و b و c و d و e.



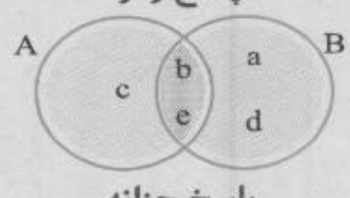
پاسخ ریحانه

پاسخ ریحانه درست است. زیرا اولاً b و e عضو هر دو مجموعه A و B هستند. ثانیاً عضوهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه A یا B متعلق باشند a و b و c و d و e است.



پاسخ زهرا

پاسخ زهرا نادرست است. زیرا مجموعه عضوهایی که به هر دو مجموعه A و B تعلق دارند عبارت است از $\{a,b,e\}$. بنابراین $A\cap B=\{a,b,e\}$ است که با خواسته مسئله متفاوت است.

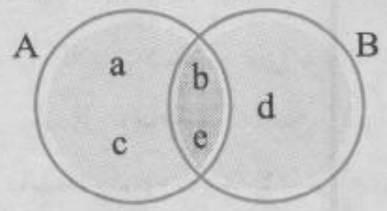


پاسخ حنانه

پاسخ حنانه درست است. زیرا b و e عضوهایی هستند که هم به A و هم به B متعلق‌اند. ثانیاً عضوهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق داشته باشند عبارتند از a و b و c و d و e.

BIAMOZ.com

ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ همکلاسی‌های خود مقایسه کنید.



بله- با مقایسه پاسخ خود و دیگر هم‌کلاسی‌ها مشاهده می‌کنیم که تعداد حالت‌هایی که بتوان A و B را طبق شرایط داده شده تشکیل داد، متنوع است و یک جواب واحد به دست نمی‌آید.

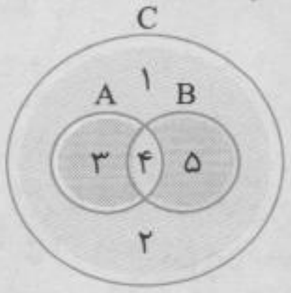
۲- باتوجه به اوّلین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد $V-F$ نمایش می‌دهیم.

$V-F=$ {حسین و فرشید و سامان و احسان}

$F-V=$ {محمد و کیوان و حسن و سبحان}

کار در کلاس ۱۳

۱- باتوجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست است؟



الف) $C \subseteq A$ درست

ب) $B \subseteq C$ درست

ج) $C \subseteq (A \cup B)$ نادرست

د) $(A \cup B) \subseteq C$ درست

ه) $۲ \in (A \cup B)$ نادرست

و) $۴ \notin (A \cap B)$ نادرست

ز) $A \cup B = A$ نادرست

ح) $۵ \in (A \cup B)$ درست

ط) $۴ \in (A \cup B)$ درست

۲- مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید:

$A = \{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$ مجموعه شمارنده‌های طبیعی ۱۲

$B = \{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}$ مجموعه شمارنده‌های طبیعی ۱۸

الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن شمارندهٔ ۱۸ باشد ولی شمارندهٔ ۱۲ نباشد.

$B - A = \{۹,۱۸\}$

ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارندهٔ ۱۲ و هم شمارندهٔ ۱۸ باشند.

$A \cap B = \{۱,۲,۳,۶\}$

۳- مجموعه‌های $(\mathbb{Z}-\mathbb{N})$ ، $(\mathbb{N}-\mathbb{Z})$ و $(W-\mathbb{N})$ را تشکیل دهید.

$\mathbb{Z}-\mathbb{N} = \{۰,-۱,-۲,-۳,\ldots\}$

$\mathbb{N}-\mathbb{Z} = \phi$

$W-\mathbb{N} = \{۰\}$

تمرین ۱۴

۱- مجموعه‌های $A = \{۲,۴,۶,۸,۹\}$ و $B = \{۱,۵,۷,۳,۹\}$ و $C = \{۱,۷,۸,۱۰,۱۱\}$ را در نظر بگیرید: سپس هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید:

الف) $A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

ب) $B \cup C = \{۱,۳,۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱\}$

ج) $A \cup C = \{۱,۲,۴,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱\}$

د) $A \cap B = \{۹\}$

ه) $A - B = \{۲,۴,۶,۸\}$

BIAMOZ.com

و) $C-B=\{۸,۱۰,۱۱\}$

ز) $(A-C)\cup(B-C)=\{۲,۴,۶,۹\}\cup\{۵,۳,۹\}=\{۲,۳,۴,۵,۶,۹\}$

ح) $(A\cup B)-C=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}-\{۱,۷,۸,۱۰,۱۱\}=\{۲,۳,۴,۵,۶,۹\}$

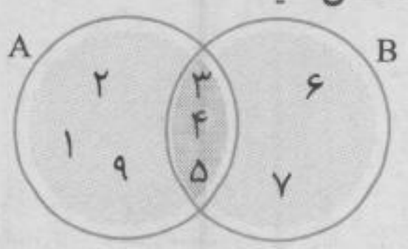
ط) $A\cap A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}=A$

ی) $A\cap\varnothing=\varnothing$

ک) $B\cup B=\{۱,۵,۷,۳,۹\}=B$

ل) $C\cup\varnothing=\{۱,۷,۸,۱۰,۱۱\}=C$

۲- باتوجه به نمودار زیر، عبارت‌های درست را با ✓ و گزاره‌های نادرست را با × مشخص کنید:



الف) $B-A=\{۶,۷\}$ ✓

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$ ✓

ج) $(A-B)\cup(B-A)=\{۱,۲,۶\}$ ×

تساوی درست به صورت زیر است: $(A-B)\cup(B-A)=\{۱,۲,۶,۷,۹\}$

د) $n(A\cup B)=۸$ ✓

هـ) $A-B=B-A$ ×

و) $n(A-B)=n(B-A)$. × زیرا $n(A-B)=۳$ و $n(B-A)=۲$.

۳- کلمات و مجموعه‌های داده شدهٔ زیر را در جاهای خالی قرار دهید:

۱) B ۲) A ۳) اجتماع ۴) زیرمجموعهٔ ۵) $(A\cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیرمجموعهٔ اجتماع همان دو مجموعه است.

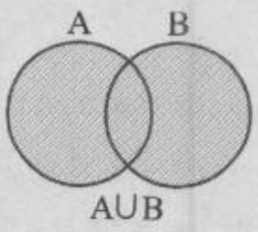
ب) هریک از دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعهٔ $(A\cup B)$ می‌باشند.

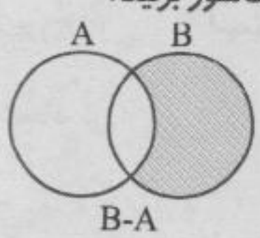
ج) اشتراک دو مجموعه A و B زیرمجموعه هریک از دو مجموعهٔ A و B است.

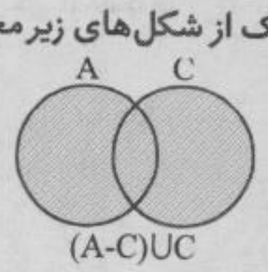
د) مجموعهٔ $A-B$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است.

هـ) اجتماع دو مجموعهٔ $(B-A)$ و $(A\cap B)$ مساوی با مجموعهٔ B است.

۴- در هریک از شکل‌های زیر مجموعهٔ موردنظر را هاشور بزنید.







ارزشیابی مستمر

۱- کدام درست و کدام نادرست است؟ (۱/۵ نمره)

الف) $(A\cap B)\subseteq A$ ب) $B\subseteq(A\cup B)$ ج) $\mathbb{N}\cap Q=Q$

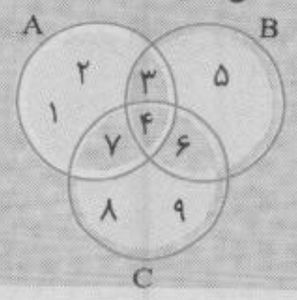
د) $\mathbb{Z}\not\subseteq Q$ هـ) $W-\mathbb{N}=\{۰\}$ و) $(A\cap B)\subset(A\cup B)$

۲- اگر $A=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{-۱,-۲,۰,۳\}$ ، مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید. (۲)

الف) $A\cap B$ ب) $A\cup B$ ج) $A-B$ د) $B-A$

۳- اگر $A=\{x\in\mathbb{N}|x<۵\}$ و $B=\{۳,۵,۷,۸\}$ ، $n(A\cup B)$ را تعیین کنید. (۱/۵)

۴- باتوجه به نمودار زیر عبارت‌های درست را با ✓ و عبارت‌های نادرست را با × مشخص کنید. (۲)



الف) $A\cap B=\{۳\}$

ب) $n(A\cap C)=۲$

ج) $n(B-C)=n(A-C)$

د) $A\cap B\cap C=\{۴\}$

BIAMOZ.com

۱ الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) ج) نادرست (۰/۲۵)
د) نادرست (۰/۲۵) هـ) درست (۰/۲۵) و) درست (۰/۲۵)

۲ الف) $A \cap B = \{0,3\}$ (۰/۵)
ب) $A \cup B = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$ (۰/۵)
ج) $A - B = \{1,2,4\}$ (۰/۵)
د) $B - A = \{-1,-2\}$ (۰/۵)

۳

$$\left.\begin{matrix} A=\{1,2,3,4\} \\ B=\{3,5,7,8\} \end{matrix}\right\} \overset{(0/5)}{\Rightarrow} A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,8\} \overset{(0/5)}{\Rightarrow} n(A \cup B) = 7 \quad (0/5)$$

۴ الف) نادرست است زیرا: $A \cap B = \{3,4\}$ (۰/۵)
ب) درست است. زیرا: $A \cap C = \{7,4\}$ (۰/۵)
ج) نادرست است زیرا: $B - C = \{3,5\}$ و $A - C = \{1,2,3\}$ (۰/۵)
د) درست است. (۰/۵)

۴ درس مجموعه‌ها و احتمال

چکیده درس:

نکته ۲۰: اگر A یک پیشامد تصادفی باشد، احتمال رخ دادن پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و آن را با فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

که در آن $n(A)$ تعداد عضوهای پیشامد A و $n(S)$ تعداد کل حالت‌های ممکن برای آن پدیده تصادفی است.

مثال: تاسی را پرتاب می‌کنیم مطلوبست:

الف) احتمال اینکه عدد رو شده زوج باشد؟

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{2,4,6\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ب) احتمال اینکه عدد رو شده کمتر از ۳ باشد؟

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{1,2\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

نکته ۲۱: دو پیشامد A و B را هم‌شانس می‌گوییم هرگاه احتمال‌های رخداد این پیشامدها یکسان باشد، یعنی $P(A) = P(B)$.

مثال: دو سکه را پرتاب می‌کنیم:

الف) احتمال اینکه حداقل یکی از سکه‌ها «رو» بیاید چقدر است؟

$$S=\{(پ,پ),(پ,ر),(ر,پ),(ر,ر)\} \rightarrow n(S) = 4$$

$$A=\{(پ,پ),(پ,ر),(ر,پ)\} \rightarrow n(A) = 3$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$$

ب) احتمال اینکه هر دو سکه با هم «رو» نباشند چقدر است؟

$$B=\{(پ,پ),(پ,ر),(ر,پ)\} \rightarrow n(B) = 3$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$$

ج) آیا دو پیشامد قسمت «الف» و قسمت «ب» هم‌شانس هستند؟

بله، زیرا $P(A) = P(B)$

فعالیت ۱۶

با توجه به چرخندهٔ مقابل، همهٔ حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعهٔ S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:



$$S = \{1,2,3\}$$

BIAMOZ.com

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید: پاسخ‌های خود را با همکلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

$A = \{۳,۱\}$ (عقربه روی ناحیهٔ ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)

$B = \{۱,۲\}$ عقربه روی عدد ۳ نایستد

$C = \{۲,۳\}$ عقربه روی عددی اول بایستد

$D = \{۲\}$ عقربه روی عدد زوج بایستد

ب) هریک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به‌دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس است؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

$$A = \varnothing \Rightarrow n(A) = ۰ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۰}{۳} = ۰$$

$$A = \{۱\} \Rightarrow n(A) = ۱ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۳}$$

$$A = \{۲\} \Rightarrow n(A) = ۱ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۳}$$

$$A = \{۳\} \Rightarrow n(A) = ۱ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۳}$$

$$A = \{۲,۳\} \Rightarrow n(A) = ۲ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۳}$$

$$A = \{۱,۳\} \Rightarrow n(A) = ۲ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۳}$$

$$A = \{۱,۲\} \Rightarrow n(A) = ۲ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۳}$$

$$A = \{۱,۲,۳\} = S \Rightarrow n(A) = ۳ \Rightarrow P(A) = P(S) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۳} = ۱$$

پیشامدهای $\{۱\}$ و $\{۲\}$ و $\{۳\}$ هم‌شانس هستند. همچنین سه پیشامد $\{۱,۲\}$ و $\{۱,۳\}$ و $\{۲,۳\}$ نیز هم‌شانس هستند.

ج) همهٔ زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

زیرمجموعه‌های S: $\varnothing, \{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱,۲\}, \{۲,۳\}, \{۱,۳\}, \{۱,۲,۳\} = S$

کار در کلاس ۱۶

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

الف) مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن $S = \{۱,۲, \ldots ,۱۰\}$ است. پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعهٔ A را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به‌دست آورید.

عدد روی کارت کمتر از ۵ $\leftarrow A = \{۱,۲,۳,۴\}$

$$\left.\begin{matrix} n(A) = ۴ \\ n(S) = ۱۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادنِ آن پیشامد، $\frac{۴}{۱۰}$ باشد. پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم: «عدد روی کارت خارج شده عددی اول باشد»

$$\left.\begin{matrix} A = \{۲,۳,۵,۷\} \Rightarrow n(A) = ۴ \\ n(S) = ۱۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۱۰}$$

BIAMOZ.com

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اوّل و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل دهید و احتمال رخدادِ هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس هستند؟ چرا؟

$$B=\{۲,۳,۵,۷\} \rightarrow n(B)=۴ \rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۰}$$

$$B=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\} \rightarrow n(C)=۵ \rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۰}$$

پیشامدهای B و C هم‌شانس نیستند. زیرا احتمال رخداد آنها با هم برابر نیست.

تمرین ۱۷

۱- اگر تاسی را بیاندازیم چقدر احتمال دارد:

الف) عدد رو شده زوج باشد.

ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ‌تر باشد.

ج) عدد رو شده زوج و اول باشد.

د) عدد رو شده از ۳ کم‌تر باشد.

وقتی تاسی را می‌اندازیم شش حالت ممکن است اتفاق بیافتد که عبارتند از ۱ و ۲و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ بنابراین: $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $n(S)=۶$.

الف) $A=\{۲,۴,۶\} \Rightarrow n(A)=۳ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ب) $B=\{۴,۶\} \Rightarrow n(B)=۲ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

ج) $C=\{۲\} \Rightarrow n(C)=۱ \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$

د) $D=\{۱,۲\} \Rightarrow n(D)=۲ \Rightarrow P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

۲- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اوّلاً مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د،د،پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟

$S=\{(د,د,د),(پ,د,د),(د,پ,د),(د,د,پ),(پ,پ,د),(پ,د,پ),(د,پ,پ),(پ,پ,پ)\}$
$\Rightarrow n(S)=۸$

پیشامد A را «داشتن دو فرزند دختر» در نظر می‌گیریم:

$$A=\{(پ,د,د),(د,پ,د),(د,د,پ)\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$

۳- در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:

الف) این مهره آبی باشد.

ب) این مهره سبز نباشد.

ج) این مهره قرمز یا سبز باشد.

اگر سه مهره قرمز را «قرمز ۱، قرمز ۲ و قرمز ۳» و ۴ مهره آبی را «آبی ۱، آبی ۲، آبی ۳ و آبی ۴» و ۵ مهره سبز را «سبز ۱، سبز ۲، سبز ۳، سبز ۴ و سبز ۵» در نظر بگیریم، کل حالت‌های ممکن برای مهره خارج شده عبارت است از:

$S=\{س-۵,س-۴,س-۳,س-۲,س-۱,آ-۴,آ-۳,آ-۲,آ-۱,ق-۳,ق-۲,ق-۱\}$
$\Rightarrow n(S)=۱۲$

الف) $A=\{۱-آ,۲-آ,۳-آ,۴-آ\} \Rightarrow n(A)=۴ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$

ب) $B=\{۱-آ,۲-آ,۳-آ,۴-آ,۱-ق,۲-ق,۳-ق\} \Rightarrow n(B)=۷ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۷}{۱۲}$

ج) $C=\{س-۵,س-۴,س-۳,س-۲,س-۱,ق-۳,ق-۲,ق-۱\} \Rightarrow n(C)=۸$
$\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$

BIAMOZ.com

۴- اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد: (اگر مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را S بنامیم، $n(s)=۳۶$)

الف) هر دو بار، عدد اوّل رو شود.

ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد.

ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد.

د) مجموع دو عدد، ۷ باشد.

الف) $A=\{(۲,۳),(۳,۲),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

ب) $B=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}\Rightarrow n(B)=۶$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ج) $C=\{(۳,۶),(۶,۳),(۳,۳),(۶,۶)\}\Rightarrow n(C)=۴$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

د) $D=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ارزشیابی مستمر

۱- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۰/۵ نمره)

«نسبت تعداد حالت‌های مطلوب برای یک پیشامد به تعداد کل حالت‌های ممکن را ..... آن پیشامد می‌گویند.»

۲- جای خالی را با عدد مناسب پر کنید. (۲)

الف) احتمال آمدن عددی اول در پرتاب یک تاس برابر ..... است.

ب) احتمال آمدن دو «رو» در پرتاب دو سکه برابر ..... است.

ج) احتمال آمدن مجموع ۳ در پرتاب دو تاس برابر ..... است.

د) احتمال آمدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس برابر ..... است.

۳- فرض کنید یک تاس را پرتاب کرده‌ایم. پیشامدهای هم‌شانس را به هم وصل کنید. (۱/۵)

پیشامد عددی زوج	پیشامد مضرب ۶
پیشامد عدد ۱	پیشامد عددی بین ۱و۴
پیشامد عدد بزرگ‌تر از ۴	پیشامد عددی فرد

۴- یک تاس را دوبار پرتاب می‌کنیم. احتمالات زیر را حساب کنید. (۳/۵)

الف) احتمال اینکه هر دو بار عددی اول بیاید یا هر دو عدد یکسان باشند.

ب) احتمال اینکه مجموع ۷ باشد و حداقل یکی از عددها، «عدد اول» باشد.

۵- در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سبز وجود دارد. یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه این مهره آبی یا قرمز باشد چقدر است؟ (۲/۵)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ احتمال رخ دادن (۰/۵)

۲ الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۲}{۳۶}$ د) صفر (هر قسمت ۰/۵)

BIAMOZ.com

۳

پیشامد عددی زوج — پیشامد مضرب ۶ (۰/۵)

پیشامد عدد ۱ — پیشامد عددی بین ۱و۴ (۰/۵)

پیشامد عدد بزرگ‌تر از ۴ — پیشامد عددی فرد (۰/۵)

۴ الف)

$n(S)=۳۶$ (۰/۵)

(۱) $A=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۵),(۳,۲),(۵,۲),(۵,۳),(۱,۱),(۴,۴),(۶,۶)\}$

$\Rightarrow n(A)=۱۲ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$ (۰/۵)

ب)

$B=\{(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$ (۰/۵)

$n(B)=۴ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$ (۰/۵)

۵

$n(S)=۴+۳+۴=۱۱$ (۰/۵)

$n(A)=۳+۴=۷$ (۱) (آبی + قرمز)

$\rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۱۱}$ (۱)

آزمون تکنیکی

مدت: .....

تاریخ: ...../...../.....

مبحث: فصل اول

۱- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. ۱

الف) هر مجموعه ناتهی حداقل دارای ..... زیرمجموعه است.

ب) اجتماع دو مجموعه $\mathbb{Z}$ و W مجموعه ..... است.

ج) احتمال پیشامد «آمدن عدد اول یا عددی فرد» در پرتاب یک تاس .....

د) اگر مجموعه W را از مجموعه $\mathbb{N}$ کم کنیم مجموعه ..... به‌دست می‌آید.

۲- مقادیر a و b را چنان بیابید که در مجموعه‌ی $A=\{۳,a+b\}$ و $B=\{a,۵\}$ باهم مساوی باشند. ۱

۳- هر کدام از عبارت‌های ستون سمت چپ را به یک عبارت از ستون سمت راست وصل کنید. ۱/۵

$\mathbb{Z}-\mathbb{N}$	Q
$B\cap\varnothing$	صفر
$(A-B)\cup(A\cap B)$	$(A-B)\cup(B-A)$
$(A\cup B)-(A\cap B)$	$\{۰,-۱,-۲,...\}$
$P(\phi)$	$\varnothing$
$\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ b\neq۰\}$	A
	$\{۰\}$

۴- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. ۱

الف) عبارت «همهٔ کتاب‌های قدیمی کتابخانه مدرسه» یک مجموعه را مشخص می‌کند.

ب) مجموعه تهی زیرمجموعه همهٔ مجموعه‌هاست.

BIAMOZ.com

۵- اگر $A \subseteq B \subseteq C$ باشد A و B و C را با نمودار ون مشخص کنید. ۰/۵

۶- همه زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید. ۱/۵

۷- مجموعه A را به زبان ریاضی و مجموعه B را با نوشتن عضوهایش مشخص کنید. ۱/۵

$B = \{2k-1 \mid k \in W\} =$ $A = \{7, 8, 9, 10\} =$

۸- اگر $A = \{1, -1, 2, 0\}$ و $B = \{1, 3, 2\}$ مجموعه‌های زیر را بیابید. ۲

الف) $A \cup B$ ب) $A \cap B$ ج) $A - B$ د) $B - A$

پاسخ آزمون تلفیقی فصل اول

۱ الف) ۲ ب) $\mathbb{Z}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) تهی (هر مورد (۰/۲۵))

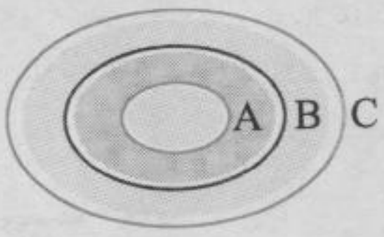
۲ $\begin{cases} A = \{3, a+b\} \\ B = \{a, 5\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a+b = 5 \end{cases} \xrightarrow{a=3} 3+b=5 \rightarrow b=2$ (۰/۵)

۳

$\mathbb{Z} - \mathbb{N}$	Q
$B \cap \varnothing$	صفر
$(A-B) \cup (A \cap B)$	$(A-B) \cup (B-A)$
$(A \cup B) - (A \cap B)$	$\{0, -1, -2, \ldots\}$
$P(\phi)$	$\varnothing$
$\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$	A
	$\{0\}$

۴ الف) نادرست است. چون کاملاً مشخص نیست عضوهای این مجموعه چه کتاب‌هایی هستند. (یعنی معیار قدیمی بودن یا نبودن یک کتاب مشخص نیست). (۰/۵) ب) درست است. چون مجموعه تهی عضوی ندارد که در مجموعه‌های دیگر وجود نداشته باشد. (۰/۵)

۵



(۰/۵)

۶ (۱/۵)

$\{a, b, c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \phi$

۷

$A = \{7, 8, 9, 10\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 10\}$ (۰/۷۵)

$B = \{2k-1 \mid k \in W\} = \{-1, 1, 3, 5, \ldots\}$ (۰/۷۵)

۸ هر مورد (۰/۵) نمره

الف) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ب) $A \cap B = \{1, 2\}$ ج) $A - B = \{-1, 0\}$ د) $\{3\}$

BIAMOZ.com

فصل ۲ عددهای حقیقی

درس ۱ عددهای گویا

چکیده درس:

نکته ۱: منظور از عبارت $x < a$ این است که x هر عددی کوچک‌تر از a است. و منظور از عبارت $x \leq a$ این است که x هر عددی کوچک‌تر از a یا اینکه مساوی خود a است. (می‌خوانیم x کوچک‌تر یا مساوی با a)

نکته ۲: منظور از عبارت $x > a$ این است که x هر عددی بزرگ‌تر از a است و منظور از عبارت $x \geq a$ این است که x هر عدد بزرگ‌تر از a است یا مساوی خود a است. (می‌خوانیم x بزرگ‌تر یا مساوی با a)

نکته ۳: وقتی می‌نویسیم $a < x < b$، منظور این است که x عددی بین a و b است. و وقتی می‌نویسیم $a \leq x \leq b$ منظور این است که x عددی بین a و b است و می‌تواند خود a و خود b نیز باشد.

مثال: آیا عدد ۳ عضو مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 3\}$ است؟

بله. زیرا این مجموعه شامل عددهای صحیح بزرگ‌تر یا مساوی ۳ است.

نکته ۴: برای مشخص کردن یک یا چند عدد گویا بین دو عدد گویای داده شده از یکی از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

الف) برای دو عدد داده شده مخرج مشترک می‌گیریم. سپس این مخرج مشترک را آن قدر بزرگ می‌کنیم تا بین دو عدد واقع در صورت، به تعداد لازم عدد صحیح موجود باشد.

ب) دو عدد گویای داده شده را جمع می‌کنیم و بر ۲ تقسیم می‌کنیم (میانگین دو عدد گویای داده شده را می‌یابیم). این کار را آنقدر انجام می‌دهیم تا به تعداد مورد نیاز عدد گویا بین دو عدد داده شده بیابیم.

مثال: بین دو عدد $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{7}$ دو عدد گویا بنویسید.

روش اول: (مخرج مشترک)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{5} = \frac{14}{35} \xrightarrow[\text{سه برابر می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}} \frac{42}{105} \\ \frac{3}{7} = \frac{15}{35} \xrightarrow[\text{سه برابر می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}} \frac{45}{105} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{43}{105}, \frac{44}{105} < \frac{3}{7}$$

روش دوم: (میانگین‌دو عدد)

$$\frac{2}{5} < \frac{\frac{2}{5}+\frac{3}{7}}{2} < \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{29}{70} < \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{29}{70} < \frac{\frac{29}{70}+\frac{3}{7}}{2} < \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{29}{70}, \frac{59}{140} < \frac{3}{7}$$

نکته ۵: برای مقایسه چند کسر داده شده، ابتدا برای آنها مخرج مشترک می‌گیریم. سپس صورت کسرها را با هم مقایسه می‌کنیم.

مثال: کسرهای $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ را مقایسه کنید.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} = \frac{10}{20} \\ \frac{3}{4} = \frac{15}{20} \\ \frac{2}{5} = \frac{8}{20} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{8}{20} < \frac{10}{20} < \frac{15}{20} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

نکته ۶: هرگاه بخواهیم یک عدد کسری را به‌صورت اعشاری نمایش دهیم، کافی است صورت آن را بر مخرج تقسیم کنیم. در این صورت یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

الف) تعداد رقم‌های اعشاری مشخص است و به انتها می‌رسد. (مختوم) مثلاً:

$$\frac{7}{58} = 1/2 \text{ ، } \frac{1}{8} = 0/125 \text{ ، } \frac{3}{4} = 0/75 \text{ ، } \frac{3}{5} = 0/6$$

ب) تعداد رقم‌های اعشاری بیشمار است و هیچ‌وقت تمام نمی‌شود و رقم‌ها به‌طور متناوب تکرار می‌شود. مثلاً

$$\frac{7}{6} = 1/166666\ldots = 1/1\overline{6} \text{ و } \frac{1}{3} = 0/3333\ldots = 0/\overline{3}$$

$$\frac{7}{33} = 0/212121\ldots = 0/\overline{21}$$

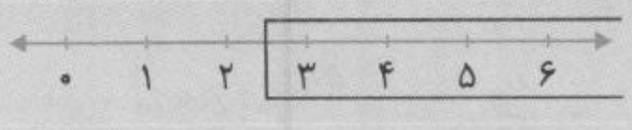
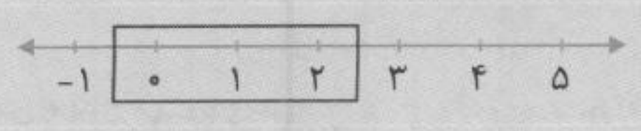
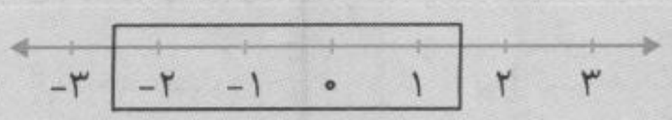
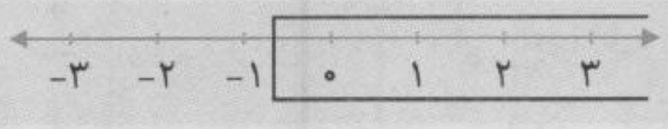
نکته ۷: اگر یک کسر به گونه‌ای باشد که پس از ساده شدن، مخرج آن فقط شمارنده‌های ۲ یا ۵ را داشته باشد، صورت اعشاری آن مختوم است. در غیر این صورت، شکل اعشاری آن متناوب خواهد بود.

مثال: عدد $\frac{5}{8}$ دارای شکل اعشاری مختوم است و عدد $\frac{3}{14}$ دارای صورت متناوب است.

BIAMOZ.com

فعالیت

۱- در فصل گذشته با نمایش‌های مختلف مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

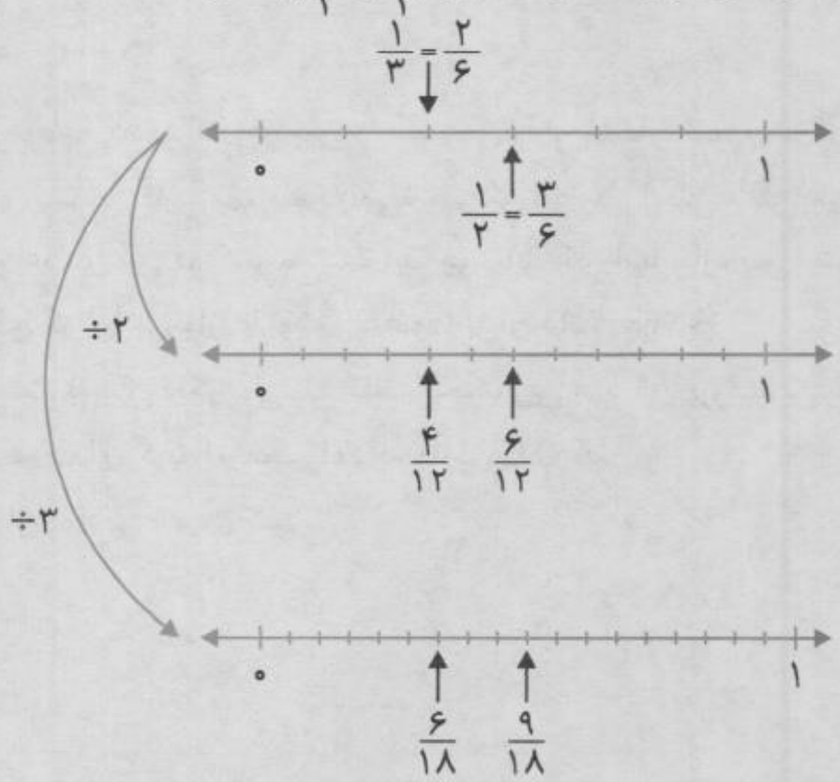
ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3\}$ $\{3,4,5,\ldots\}$	
۲	عددهای حسابی کمتر از ۲	$\{x \in w \mid x \leq 2\}$ $\{0,1,2\}$	
۳	عددهای صحیح بین ۳- و ۲	$\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 2\}$ $\{-2,-1,0,1\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگ‌تر از ۱-	$\{x \in \mathbb{Z} \mid x > -1\}$ $\{0,1,2,\ldots\}$	

نامساوی $x \geq 3$ برای کدام‌یک از عددهای زیر درست است؟ ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱

فقط برای ۳ و ۴ و ۵ درست است. زیرا عددهای ۱و۲ کمتر از ۳ هستند.

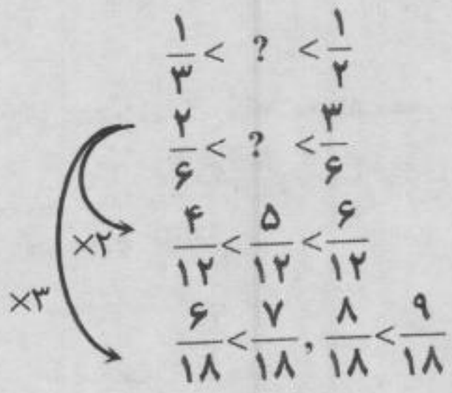
۲- می‌خواهیم بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هرکدام را توضیح دهید.

روش مریم: مریم ابتدا هر دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ را روی یک محور مشخص کرده است. این دو عدد متناظر با عددهای $\frac{2}{6}$ و $\frac{3}{6}$ روی محور هستند. از آنجا که بین ۲ و ۳ عدد طبیعی موجود نیست، او با بیش‌تر کردن تعداد تقسیم‌بندی‌های هر واحد (دو برابر کردن تعداد تقسیم‌بندی‌ها) یک عدد بین آن دو یافته است. (عدد $\frac{5}{12}$) به همین ترتیب با سه برابر کردن تعداد تقسیم‌بندی‌های هر واحد دو عدد بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ پیدا کرده است.

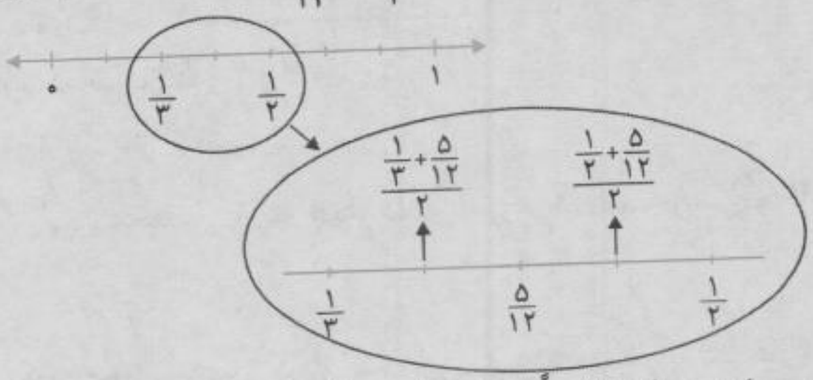


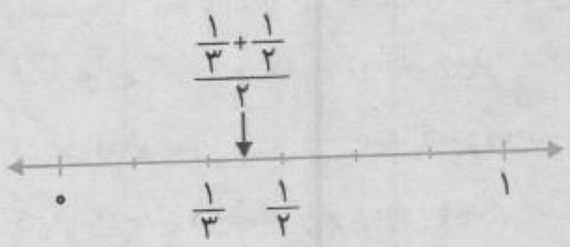
روش بهار: بهار تقریباً همان روش مریم را به کار برده است. با این تفاوت که از محور عددها استفاده نکرده است. او ابتدا برای دو عدد $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ مخرج مشترک گرفته است. سپس با بزرگ‌تر کردن این مخرج مشترک باعث شده صورت دو کسر از هم فاصله پیدا کنند و عددهای بیش‌تری بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ پیدا شود. وقتی مخرج مشترک ۱۲ است یک عدد و وقتی مخرج مشترک ۱۸ است دو عدد بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ وجود دارد.

BIAMOZ.com



روش مهناز: مهناز دو عدد $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ را روی محور مشخص کرده است. سپس با پیدا کردن میانگین آنها عددی را بین آنها یافته است ($\frac{5}{12}$). بار دیگر با پیدا کردن میانگین دو عدد $\frac{5}{12}$ و $\frac{1}{3}$ عددی دیگر را پیدا کرده است و با تکرار همین روش، میانگین دو عدد $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{12}$ را یافته تا عدد دیگری را بیابید.





روش عطیه: عطیه تقریباً همان کاری را انجام داده است که مهناز انجام داد. با این تفاوت که از محور استفاده نکرده است. عطیه با جمع کردن $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و تقسیم کردن حاصل جمع آن‌ها بر دو، میانگین آنها را یافته است که همان عدد $\frac{5}{12}$ است. با همین روش می‌توان عددی بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{12}$ و عدد دیگری بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{12}$ را یافت.

$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$

الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بیشمار، کسر پیدا کرد. اگر روش عطیه را برای یافتن عددی بین دو کسر به کار بریم، متوجه می‌شویم که این کار (یعنی یافتن میانگین دو کسر) می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد و اعدادی بین دو کسر به‌دست آید. چون این کار انتها ندارد پس بیشمار عدد می‌توان یافت.

ب) آیا مجموعهٔ عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟ خیر، زیرا بین هر دو عدد گویا بیشمار عدد گویای دیگر موجود است. به بیان دیگر نمی‌توان گفت کوچک‌ترین عدد گویا بزرگ‌ترین عدد گویا چیست.

ج) آیا می‌توان مجموعهٔ عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟ خیر

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$\left\{\frac{a}{b} | a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

کار در کلاس

۲۰

۱- بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

ابتدا مخرج مشترک دو کسر را یافته و آنها را با آن مخرج می‌نویسیم. یعنی $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ و $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$. حالا کافیست سه عدد بین $\frac{8}{20}$ و $\frac{15}{20}$ پیدا کنیم که عبارتند از $\frac{9}{20}$ و $\frac{10}{20}$ و $\frac{11}{20}$. البته عددهای $\frac{12}{20}$ و $\frac{13}{20}$ و $\frac{14}{20}$ نیز در بین این دو عدد قرار دارند.

BIAMOZ.com

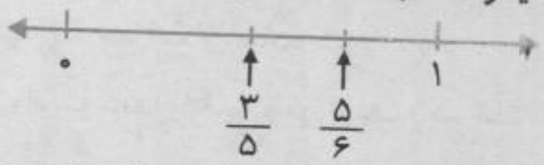
۲- بین $\frac{۱}{۲}-$ و ۱- دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

ابتدا دو عدد را با مخرج مشترک ۲ می‌نویسیم یعنی $\frac{-۱}{۲}$ و $\frac{-۲}{۲}$ از آنجا که بین ۱- و ۲- عدد صحیح موجود نیست، صورت و مخرج را سه برابر می‌کنیم تا دو عدد صحیح بین صورت دو کسر ایجاد شود، در این صورت $\frac{-۳}{۶}=\frac{-۱}{۲}$ و $\frac{-۶}{۶}=\frac{-۲}{۲}$. عددهای $\frac{-۴}{۶}$ و $\frac{-۵}{۶}$ عددهای مورد نظر هستند.

۲۰ فعالیت

۱- می‌خواهیم کسرهای $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۵}{۶}$ و $\frac{۷}{۸}$ و $\frac{۵}{۹}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم. روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند باهم مقایسه کنید؛ هرکدام را توضیح دهید و در صورت لزوم کامل کنید.

روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسرهای $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۵}{۶}$ را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟ خیر.



روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم‌مخرج کردن کسرها، آنها را مقایسه می‌کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به‌دست می‌آید. کار مرتضی را کامل کنید: برای به‌دست آوردن عدد ۳۶۰ کافی است ک.م.م عددهای ۶ و ۸ و ۵ و ۹ (مخرج‌های چهار کسر) را بیابیم.

$$\left.\begin{array}{l}۶=۲\times۳\\۸=۲^۳\\۹=۳^۲\\۵=۵^۱\end{array}\right\}\Rightarrow ک.م.م\ ۵,۶,۸,۹=۲^۳\times۳^۲\times۵=۸\times۹\times۵=۳۶۰$$

$$\frac{۵}{۹}=\frac{۲۰۰}{۳۶۰}\qquad \frac{۷}{۸}=\frac{۳۱۵}{۳۶۰}\qquad \frac{۵}{۶}=\frac{۳۰۰}{۳۶۰}\qquad \frac{۳}{۵}=\frac{۲۱۶}{۳۶۰}$$

حالا با توجه به این که مخرج‌ها مشترک است، کافی است صورت کسرها را مقایسه کنیم.

$$۲۰۰<۲۱۶<۳۰۰<۳۱۵\Rightarrow\frac{۵}{۹}<\frac{۳}{۵}<\frac{۵}{۶}<\frac{۷}{۸}$$

روش مجید: مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید:

$$\frac{۳}{۵}\simeq ۰/۶۰\qquad \frac{۵}{۶}\simeq ۰/۸۳\qquad \frac{۷}{۸}\simeq ۰/۸۷\qquad \frac{۵}{۹}\simeq ۰/۵۵$$

در مورد روش‌های مختلف و ویژگی‌های هرکدام در کلاس گفت و گو کنید.

در روش شاهد ممکن است دانش‌آموز مکان‌های تقریبی درستی را مشخص نکند و اشتباه وجود داشته باشد ولی روش مجید باتوجه به کار با ماشین حساب، دقیق‌تر است. و در مورد روش مرتضی نیز ممکن است مخرج مشترک به دست آمده بزرگ شود و امکان محاسبه را سخت کند.

۲- با کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسرهای زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید:

$$\frac{۷}{۶}\simeq ۱/۱۶\qquad \frac{۱}{۹}\simeq ۰/۱۱\qquad \frac{۱}{۷}\simeq ۰/۱۴$$

$$\frac{۳}{۸}\simeq ۰/۳۷\qquad \frac{۱}{۳}\simeq ۰/۳۳\qquad \frac{۱}{۵}\simeq ۰/۲$$

الف) ماشین حساب شما تا چند رقم را روی صفحهٔ نمایش نشان می‌دهد؟ تا ۱۲ رقم.

BIAMOZ.com

ب) **بین مقدارهای اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟** در برخی از آنها رقم‌های اعشاری انتها دارد مثل $\frac{۱}{۵}=۰/۲$ و $\frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵$ ولی در برخی دیگر رقم‌های اعشاری تمام نمی‌شود. مثل $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۷}{۶}$ و $\frac{۱}{۹}$ و $\frac{۱}{۷}$.

کار در کلاس ۲۲

نمایش اعشاری هریک از کسرهای زیر را بنویسید:

$\frac{۵}{۶}=۰/۸۳۳۳۰۰۰$ $\quad \frac{۷}{۹}=۰/۷۷۷۰۰۰$ $\quad \frac{۵}{۱۱}=۰/۴۵۴۵۰۰۰$

$\frac{۵}{۱۶}=۰/۳۱۲۵$ $\quad \frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵$ $\quad \frac{۷}{۲۲}=۰/۳۱۸۱۸۰۰۰$

اگر به نمایش اعشاری کسرهای بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسرهایی نمایش اعشاری مختوم دارد که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اوّلی به جز ۲ و ۵ ندارد.

تمرین ۲۲

۱- پس از محاسبهٔ هر قسمت، کسر مرکب را تا حد امکان ساده کنید:

توضیح: عبارت مقابل یک کسر مرکب است که در کتاب درسی حذف شده است. با راهبرد زیر مسئله حل آن را می‌بینید.

$$\frac{۱+\frac{۳}{۲}}{-۱+\frac{۳}{۴}}\times\frac{\frac{۵}{۶}-\frac{۱}{۸}}{\frac{۵}{۶}\div ۲\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{-۱}{۴}}\times\frac{\frac{۱۷}{۲۴}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۸۵}{۴۸}}{\frac{۱}{۱۲}}=-\frac{۸۵}{۴۸}\times\frac{۱۲}{۱}=\frac{-۸۵}{۴}$$

$$۱+\frac{۳}{۲}=\frac{۲}{۲}+\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$-۱+\frac{۳}{۴}=\frac{-۴}{۴}+\frac{۳}{۴}=\frac{-۱}{۴}$$

$$\frac{۵}{۶}-\frac{۱}{۸}=\frac{۲۰-۳}{۲۴}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

$$\frac{۵}{۶}\div ۲\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۶}\div\frac{۵}{۲}=\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۳}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-۲\frac{۵}{۶}+۳\frac{۱}{۲})\div(-۱-\frac{۱}{۹})=\frac{۴}{۶}\div(-\frac{۱۰}{۹})=-\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۱۰}=-\frac{۳}{۵}$$

$$-۲\frac{۵}{۶}+۳\frac{۱}{۲}=-\frac{۱۷}{۶}+\frac{۷}{۲}=\frac{-۱۷}{۶}+\frac{۲۱}{۶}=\frac{۴}{۶} \quad , \quad -۱-\frac{۱}{۹}=\frac{-۹}{۹}-\frac{۱}{۹}=\frac{-۱۰}{۹}$$

$$\frac{۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۱۰}-\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}}\div ۵\frac{۱}{۳}=\frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{-۳}{۴}}\div\frac{۱۶}{۳}=-\frac{۵}{۲۰}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۶}{۱۶}=\frac{-۵}{۱۶}$$

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}=\frac{۴-۲+۳}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

$$\frac{۵}{۱۰}-\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱۰-۱۵-۱۰}{۲۰}=\frac{-۱۵}{۲۰}=-\frac{۳}{۴}$$

$$۵\frac{۱}{۳}=\frac{۱۶}{۳}$$

BIAMOZ.com

$$-\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{-5}{6}\div\frac{7}{3}}_{-\frac{5}{6}\times\frac{3}{7}=\frac{-5}{14}}\times\frac{7}{5}+\frac{2}{3}=\frac{-1}{2}+\underbrace{\frac{-5}{14}\times\frac{7}{5}}_{\frac{-5}{14}\times\frac{7}{5}=\frac{-1}{2}}+\frac{2}{3}=\frac{-1}{2}+\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{-3-3+4}{6}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$-2\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}+4\frac{7}{12}=(-2-3+4)+(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{7}{12})=-1+\frac{-6-4+7}{12}=-1-\frac{3}{12}=-1\frac{3}{12}=-1\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\div\underbrace{(2\div\frac{-6}{5})}_{2\times\frac{-5}{6}=\frac{-5}{3}}=\frac{5}{6}-\underbrace{\frac{7}{8}\div(-\frac{5}{3})}_{\frac{-7}{8}\times-\frac{3}{5}=\frac{21}{40}}=\frac{5}{6}+\frac{21}{40}=\frac{100+63}{120}=\frac{163}{120}$$

$$\frac{1}{-1-\frac{1}{-1-\frac{1}{3}}}=\frac{1}{-\frac{1}{4}}=-4$$

$$\frac{1}{-1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{-\frac{3}{3}-\frac{1}{3}}=\frac{1}{-\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}\quad,\quad -1-(-\frac{3}{4})=-1+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

الف) $\frac{7}{8},-\frac{2}{3},\frac{3}{4},2,-3\frac{5}{6}$

از آنجا که عددهای منفی از عددهای مثبت کوچک‌ترند، کافی است، عددهای منفی را با هم و عددهای مثبت را نیز با هم مقایسه کنیم و سپس از کوچک به بزرگ مرتب کنیم.

از میان دو عدد $-3\frac{5}{6}$ و $-\frac{2}{3}$ واضح است که عدد $-\frac{2}{3}$ بزرگ‌تر است. زیرا عدد $-3\frac{5}{6}$ سه واحد کامل منفی دارد در حالی که عدد $\frac{-2}{3}$ هنوز به یک واحد منفی هم نرسیده است. برای مقایسه عددهای ۲ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{7}{8}$ ابتدا مخرج مشترک ۸ را برای آنها در نظر می‌گیریم.

$$\frac{7}{8},\frac{3}{4}=\frac{6}{8},2=\frac{16}{8}\Rightarrow\frac{6}{8}<\frac{7}{8}<\frac{16}{8}\Rightarrow\frac{3}{4}<\frac{7}{8}<2$$

بنابراین در حالت کلی داریم:

$$-3\frac{5}{6}<-\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{7}{8}<2$$

ب) $\frac{16}{7},-\frac{3}{4},2/75,-\frac{5}{6},4\frac{3}{5},\frac{56}{13}$

از آنجا که $\frac{16}{7}=2\frac{2}{7}$ و $4\frac{4}{13}=\frac{56}{13}$ داریم:

$$-\frac{5}{6}<-\frac{3}{4}<\frac{16}{7}<2/75<\frac{56}{13}<4\frac{3}{5}$$

۴- بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

الف) $\frac{10}{11},\frac{12}{13}\rightarrow\frac{10}{11}=\frac{130}{143}=\frac{520}{572},\frac{12}{13}=\frac{132}{143}=\frac{528}{572}\Rightarrow\frac{10}{11}<\frac{521}{572},\frac{522}{572},\frac{523}{572}<\frac{12}{13}$

ب) $0,\frac{-1}{3}\rightarrow-\frac{1}{3}<\frac{-1}{4},-\frac{1}{5},\frac{-1}{6}<0$

BIAMOZ.com

ارزشیابی مستمر

۱- کدام گزینه در نامساوی $x \geq ۲$ صدق می‌کند. چرا؟ (۱ نمره)

الف) ۲ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) ۱/۵- د) ۰

۲- با روش هم‌مخرج کردن ۳ عدد گویا بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۲}{۳}$ بنویسید. (۱/۵)

۳- با روش میانگین گرفتن ۲ عدد گویا بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ بیابید. (۱/۵)

۴- مجموعهٔ عددهای گویا را به زبان ریاضی معرفی کنید و این مجموعه را نامگذاری نمایید. (۱)

۵- کسرهای $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۴}{۷}$ را از چپ به راست از کوچک به بزرگ مرتب کنید. (۱)

۶- بدون تقسیم کردن بگویید کدام یک از کسرهای زیر نمایش اعشاری مختوم دارد؟ چرا؟ (۱)

الف) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ب) $\frac{۴}{۱۵}$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. (۳)

الف) $\left[-۲\frac{۱}{۳}-۱\frac{۱}{۵}\right]\div(-۵\frac{۳}{۱۰})$ ب) $\frac{۲-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۳}}$

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ گزینه (الف) درست است (۰/۲۵). زیرا عبارت $x \geq ۲$ یعنی همه‌ی اعدادی که بزرگ‌تر از ۲ یا مساوی با ۲ باشند. در گزینه‌های ب و ج و د همگی عددهای کوچک‌تر از ۲ هستند. (۰/۷۵)

۲ ابتدا دو کسر داده شده را هم‌مخرج می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۳۲}{۴۸}\ (۰/۵)\\ \frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۱۲}=\frac{۳۶}{۴۸}\ (۰/۵)\end{array}\right\}\Rightarrow \underset{(۰/۵)}{\frac{۲}{۳}<\frac{۳۳}{۴۸},\frac{۳۴}{۴۸},\frac{۳۵}{۴۸}}<\frac{۳}{۴}$$

۳

$$\frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}}{۲}=\frac{۱}{۲}\ (۰/۵)\Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{\frac{۱}{۳}<\frac{۱}{۲}}<\frac{۲}{۳}\Rightarrow \frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۵}{۱۲}\ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}<\frac{۵}{۱۲}<\frac{۱}{۲}<\frac{۲}{۳}\ (۰/۲۵)$$

۴ مجموعه عددهای گویا را با حرف Q نامگذاری کرده و به صورت زیر معرفی می‌کنند:

$$Q=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ b\neq ۰\right\}\ (۱)$$

۵ ابتدا برای ۳ کسر داده شده مخرج مشترک می‌یابیم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۱}{۳}=\frac{۳۵}{۱۰۵}\ (۰/۲۵)\\ \frac{۳}{۵}=\frac{۶۳}{۱۰۵}\ (۰/۲۵)\\ \frac{۴}{۷}=\frac{۶۰}{۱۰۵}\ (۰/۲۵)\end{array}\right\}\Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{\frac{۱}{۳}<\frac{۴}{۷}}<\frac{۳}{۵}$$

BIAMOZ.com

۶ کسر (الف) نمایش اعشاری مختوم دارد ولی کسر (ب) نمایش اعشاری مختوم ندارد (۰/۵) زیرا مخرج کسر $\frac{۱۲}{۲۵}$ (عدد ۲۵) تنها شمارنده اول ۵ را دارد (۰/۲۵) ولی مخرج کسر $\frac{۴}{۱۵}$ (عدد ۱۵) دارای شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ است (۰/۲۵).

۷ (الف) $\left[-۲\frac{۱}{۳}-۱\frac{۱}{۵}\right]\times\left(\frac{-۱۰}{۵۳}\right)=\left[\frac{-۷}{۳}\times\frac{۶}{۵}\right]\times\left(-\frac{۱۰}{۵۳}\right)=\frac{۱}{۵۳}\times\left(\frac{۲}{۱۰}\right)=+\frac{۲}{۳}$ (۰/۵)

(۰/۵) (۰/۵)

(ب) $\frac{۲-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۱۲-۲+۳}{۶}}{\frac{۹-۴}{۱۲}}=\frac{\frac{۱۳}{۶}}{\frac{۵}{۱۲}}=\frac{۱۳}{۶}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۲۶}{۵}=۵\frac{۱}{۵}$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

درس ۲ عددهای حقیقی

چکیده درس:

نکته ۸: برخی از عددها مانند ۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱...، π ، $\sqrt{۵}$ ، $\sqrt{۲}$، وقتی به صورت اعشاری نوشته می‌شوند، رقم‌های اعشاری آنها تمام نمی‌شود و به‌صورت متناوب نیز تکرار نمی‌شوند. این عددهای را عددهای گنگ می‌گویند. مجموعه عددهای گنگ را با Q' نمایش می‌دهیم.

نکته ۹: جذر اعدادی که مربع کامل نیستند، یک عدد گنگ است مثلاً $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۱/۵}$ ، ... اعدادی گنگ هستند.

نکته ۱۰: اجتماع عددها گویا و عددهای گنگ را عددهای حقیقی می‌نامند و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهند. یعنی $Q\cup Q'=\mathbb{R}$. عددهای گویا و عددهای گنگ اشتراک ندارند یعنی $Q\cap Q'=\varnothing$

نکته ۱۱: بین هر دو عدد حقیقی، بیشمار عدد گنگ و بیشمار عدد گویا وجود دارد.

نکته ۱۲: عددهای حقیقی را می‌توان روی محور نمایش داد. در این صورت این محور را محور عددهای حقیقی می‌گوییم. هر قطعه از عددهای حقیقی را توسط یک پاره‌خط یا نیم‌خط مشخص می‌کنیم. اگر نقطه ابتدایی یا انتهایی خودشان جزء این قطعه از عددهای حقیقی باشند، از دایره توپر برای نمایش آنها استفاده می‌کنیم و اگر جزء این قطعه نباشند از دایره توخالی استفاده می‌کنیم.

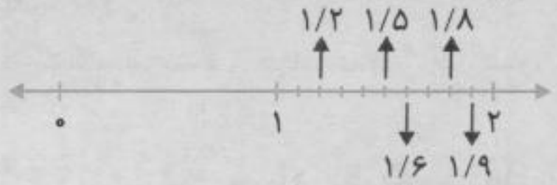
مثال: مجموعه‌های زیر را روی محور مشخص کنید.

$A=\{x\in\mathbb{R}\mid x>۲\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲\le x<۴\}$

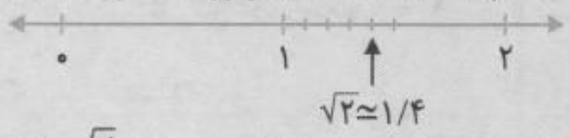


فعالیت ۲۳

۱- پنج عدد بین ۱ و ۲ معرفی کنید و آنها را روی محور نمایش دهید. عددهای ۱/۲ و ۱/۵ و ۱/۶ و ۱/۸ و ۱/۹



۲- با توجه به اینکه مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ مساوی ۱/۴ است، آن را روی محور نشان دهید.



۳- معلّم از دانش‌آموزان خواست با ماشین حساب، مقدار تقریبی عدد $\sqrt{۲}$ را بنویسند. با توجه به اینکه دانش‌آموزان از ماشین حساب‌های مختلف استفاده می‌کردند، تعداد رقم‌هایی که نوشته بودند متفاوت بود. سه نمونه از صفحه نمایش ماشین حساب‌ها را در زیر می‌بینید. با توجه به آنها به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

1.4142136 1.414213562

1.41421356237

BIAMOZ.com

- **چرا در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر با رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد.** زیرا در ماشین حساب ۸ رقمی تقریب زدن با روش گرد کردن انجام شده است.
- **چرا این تفاوت در ماشین حساب‌های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی‌شود؟** زیرا رقم آخر در ماشین حساب ده رقمی با روش گرد کردن تغییری نمی‌کند. چرا که رقم پس از آن ۳، است.
- **باتوجه به عددی که ماشین حساب ۱۲ رقمی نشان می‌دهد، آیا تناوب (تکرار منظم) در رقم‌های اعشاری دیده می‌شود؟** خیر هیچ تناوبی دیده نمی‌شود.
- **مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ ، تا ۱۵ رقم اعشار محاسبه، و در زیر نوشته شده است:**

1.414213562373095

آیا در ۱۵ رقم نشان داده شده برای $\sqrt{۲}$ ، تناوبی می‌بینید؟ خیر

کار در کلاس

۲۴

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟

نادرست $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}'$ درست $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ نادرست $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}'$ درست $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

فعالیت

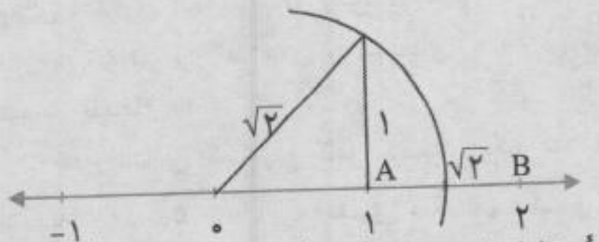
۲۴

الف) بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می‌توان نوشت؟ بیشمار عدد گویا می‌توان نوشت.

ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم، متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور می‌توان پیدا کرد؟ بیشمار نقطه.

ج) روی محور نقطهٔ نمایش $\sqrt{۲}$ را پیدا کنید.

مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع زاویه قائمه آن هر کدام یک واحد باشند، می‌سازیم. طبق رابطه فیثاغورس وتر این مثلث $\sqrt{۲}$ واحد است.



د) اگر نقاطی را رنگ کنیم که عددی گویا را نمایش می‌دهد، آیا همهٔ نقاط پاره‌خط AB رنگ می‌شود؟ آیا $\sqrt{۲}$ نیز رنگ می‌شود؟ آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عدد گویا است، یک پاره‌خط به وجود می‌آورد؟ چرا؟ خیر، همهٔ نقاط پاره خط AB رنگ نمی‌شود. نقطه متناظر با $\sqrt{۲}$ رنگ نمی‌شود. خیر این نقاط رنگ شده یک پاره‌خط ایجاد نمی‌کند. زیرا نقاطی مثل $\sqrt{۲}$ هستند که رنگ نمی‌شوند. بنابراین یک پاره‌خط پیوسته ایجاد نمی‌شود.

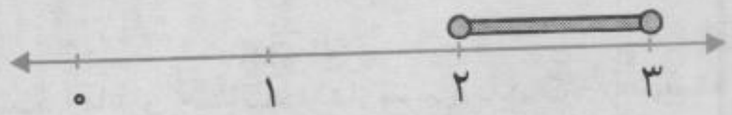
کار در کلاس

۲۵

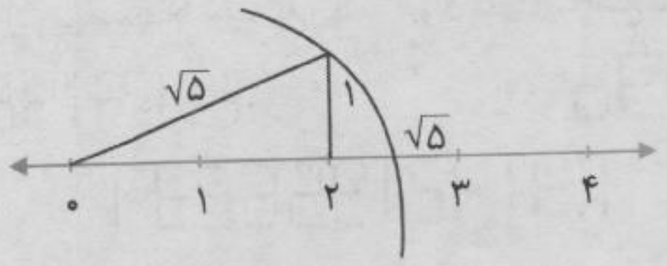
۱- **بین $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۰}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.** چهار عدد $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۹/۱}$ همگی گنگ هستند و همگی بین $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۰}$ قرار دارند.

۲- **بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.** چهار عدد گنگ عبارتند از: $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۵}$ زیرا $\sqrt{۹} = ۳$ و $\sqrt{۴} = ۲$

۳- **الف) مجموعه A به‌صورت $A = \{x \in Q \mid ۲ \leq x \leq ۳\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به‌صورت زیر درست است؟** خیر. زیرا در این بین عددهای گنگ هم هستند که عضو مجموعه A نمی‌باشند.



ب) نقطهٔ نمایش $\sqrt{۵}$ را روی محور مشخص کنید.



BIAMOZ.com

۲۵

کار در کلاس

۱- داخل ○ علامت ∈ یا ∉ بگذارید:

$\frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}} \boxed{\in} \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۱۸} \boxed{\in} \mathbb{R}$ $\quad ۰/۲ \boxed{\in} \mathbb{Q}$ $\quad ۴ \boxed{\in} \mathbb{Z}$

$\frac{۰}{۶} \boxed{\in} \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۲۵} \boxed{\notin} \mathbb{Q}'$ $\quad -\frac{۷}{۳} \boxed{\notin} \mathbb{Z}$ $\quad -۵ \boxed{\in} \mathbb{R}$

$\frac{۹}{-۱} \boxed{\in} \mathbb{Z}$ $\quad \sqrt{۰/۰۹} \boxed{\in} \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{۰/۹} \boxed{\in} \mathbb{Q}'$ $\quad \sqrt{۳/۵} \boxed{\in} \mathbb{Q}'$

توجه کنید $\frac{۰}{۶} = ۰$ و $\sqrt{۰/۰۹} = ۰/۳$ و $\sqrt{۲۵} = ۵$ است.

۲- مجموعه‌های سطر اول را به مجموعهٔ مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اوّل با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}'$ $\quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{Q}' \cap \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

$\mathbb{Z}$ $\quad \emptyset$ $\quad \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{Q}'$ $\quad \mathbb{R}$

۲۶

فعالیت

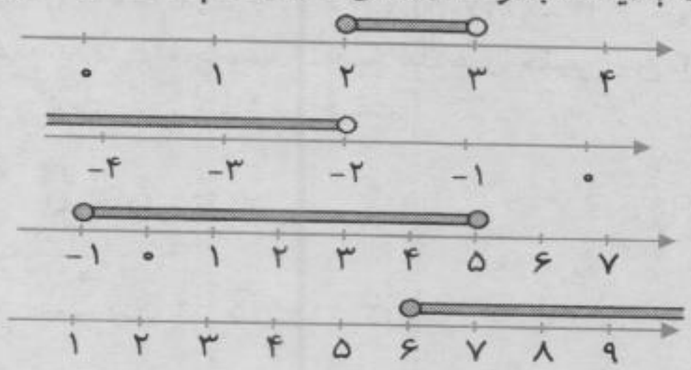
باتوجه به اینکه مجموعهٔ عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را مانند نمونه روی محور نشان دهید:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ \le x < ۳\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -۲\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ \le x \le ۵\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge ۶\}$



با توجه به مجموعهٔ A چرا نقطهٔ ۲ روی محور توپر و نقطهٔ ۳ روی محور توخالی است؟

زیرا نقطهٔ ۲ عضو مجموعه A است ولی نقطه ۳ عضو مجموعه A نیست. (از آنجا که عبارت $۲ \le ۲$ درست است پس عدد ۲ عضوی از A است و چون عبارت $۳ < ۳$ نادرست است پس عدد ۳ عضو این مجموعه نیست.)

۲۶

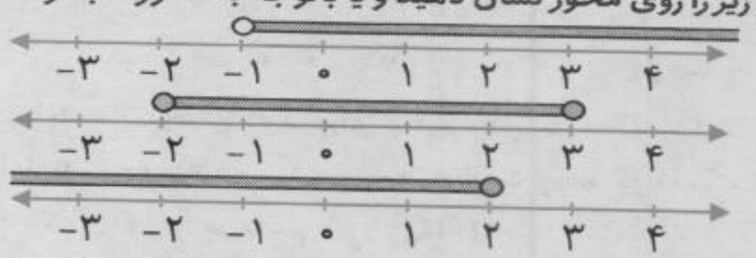
کار در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا باتوجه به محور، مجموعهٔ متناظر آن را بنویسید:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -۱\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \le x \le ۳\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le ۲\}$

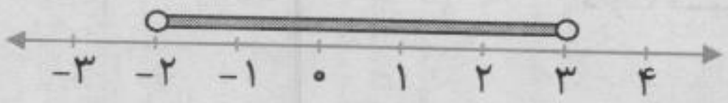


۲- باتوجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید:

$\sqrt{۱۳} \in A$ ✓ $\quad ۰/۲۵۲۵۵۲۵۵۵\cdots \in B$ ✓ $\quad ۰/۷۵ \in A$ ✓

$-۱۰۰۰ \in C$ ✓ $\quad \sqrt{۱} \in A$ ✓ $\quad \sqrt{۷} \in C$ ×

۳- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با مجموعهٔ نقاط روی شکل زیر، برابر است؟



الف) $\{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$

ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -۲\}$

ج) $\{x \in \mathbb{R} \mid -۲ < x < ۳\}$

مجموعهٔ مشخص شده در قسمت «ج» با مجموعه نقاط روی شکل برابر است.

BIAMOZ.com

تمرین

۱- با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اوّل کامل کنید:

مجموعهٔ اعداد	$\sqrt{۳/۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	π	$-\frac{۳}{۴}$	۰/۲۹۲۲۹۲۲۲۹....	-۱۰	$\frac{۶}{۲}$
$\mathbb{N}$ طبیعی	×	×	×	×	×	×	×	✓
$\mathbb{W}$ حسابی	×	×	✓	×	×	×	×	✓
$\mathbb{Z}$ صحیح	×	×	✓	×	×	×	✓	✓
$\mathbb{Q}$ گویا	×	✓	✓	×	✓	×	✓	✓
$\mathbb{Q}'$ گنگ	✓	×	×	✓	×	✓	×	×
$\mathbb{R}$ حقیقی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲- در هریک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید:

الف) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۱/۵<x<۵\}$, $B=\{x\in Q\,|\,۱/۵<x<۵\}$

در مجموعه A همهٔ عددهای حقیقی بین ۱/۵ و ۵ مورد نظر است اما در مجموعه B فقط عددهای گویای بین عددهای ۱/۵ تا ۵ مورد نظر هستند. پس A شامل عددهای گنگ است ولی B شامل عددهای گنگ نیست.

ب) $C=\{۴,۵,۶,۷,۸\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۳<x<۹\}$,

در مجموعه C تنها عددهای صحیح بین ۳ و ۹ نوشته شده‌اند اما در مجموعه D همهٔ عددهای حقیقی بین ۳ و ۹ مورد نظر هستند. یعنی مجموعهٔ D شامل عددهای گنگ و گویای بین ۳ و ۹ نیز هست.

۳- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید:

۱) $\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$ ۳) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$ $\mathbb{R}\cap\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}'$

۴- عدد $\sqrt{۵}+۱$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

روش ۱) از آنجا که $\sqrt{۹}>\sqrt{۵}>\sqrt{۴}$ پس $۳>\sqrt{۵}>۲$ است. پس $۴>\sqrt{۵}+۱>۳$. یعنی $\sqrt{۵}+۱$ بین دو عدد ۳ و ۴ قرار دارد.

روش ۲) چون $\sqrt{۵}=۲/۲$ ، پس $\sqrt{۵}+۱\simeq ۳/۲$. یعنی $\sqrt{۵}+۱$ بین ۳ و ۴ است.

۵- بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید:

الف) $-۲,۵ \rightarrow -\sqrt{۲},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۵}$

ب) $۶,۷ \rightarrow \sqrt{۳۷},\sqrt{۳۸},\sqrt{۳۹},\sqrt{۴۰}$

ج) $\sqrt{۳},۶ \rightarrow \sqrt{۱۰},\sqrt{۱۱},\sqrt{۱۲},\sqrt{۱۳}$

د) $\sqrt{۲},\sqrt{۴/۱} \rightarrow \sqrt{۲/۵},\sqrt{۳},\sqrt{۳/۲},\sqrt{۳/۹}$

۶- عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست مثال بزنید.

☑ ۱) **عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد.** ← مثلاً عدد ۱ هم صحیح است و هم گویا است.

☒ ۲) **عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.** ← زیرا می‌دانیم $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$

☑ ۳) **عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد.** ← مثلاً عدد $\sqrt{۲}$ هم حقیقی است و هم گنگ است.

☑ ۴) **عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد.** ← مثلاً عدد ۲ هم طبیعی است و هم حقیقی است.

۷- در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{۱۰}$ و عدد $\frac{۳}{۱۱}$ چه تفاوتی هست؟

ارقام اعشاری عدد $\sqrt{۱۰}$ بی‌انتها و بدون تناوب هستند. ولی ارقام اعشاری عدد $\frac{۳}{۱۱}$ بی‌انتها و متناوب است.

$\frac{۳}{۱۱}\simeq ۰/۲۷۲۷۲۷۰۰۰$

$\sqrt{۱۰}\simeq ۳/۱۶۲۲۷۷۶۶۰۱۶۸...$

BIAMOZ.com

ارزشیابی مستمر

۱- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (۲نمره)

الف) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}'$ ب) $-\sqrt{۳} \notin \mathbb{Q}$ ج) $-\frac{۳}{۴} \in \mathbb{Q}'$ د) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{Q}'$

هـ) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$ و) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}'$ ز) $۰/۱۲۳۴\cdots \in \mathbb{Q}'$ ح) $۰/\overline{۲۳} \notin \mathbb{Q}$

۲- عدد $-\sqrt{۲۱}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ (۰/۵)

۳- جای خالی را پر کنید. (۲)

الف) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' =$ .....

ب) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}' =$ .....

ج) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} =$ .....

د) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' =$ .....

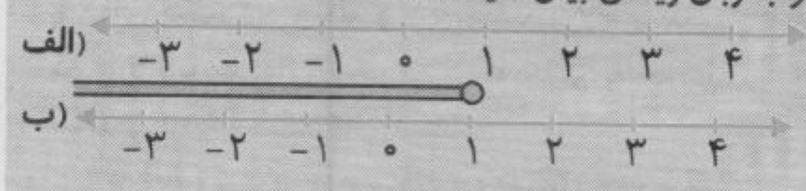
۴- در جای خالی علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید. (۲)

الف) $-۲ \bigcirc \mathbb{Z}$ ب) $-\frac{۲}{۳} \bigcirc \mathbb{Q}'$ ج) $\sqrt{۳} \bigcirc \mathbb{R}$ د) $\sqrt{۰/۰۹} \bigcirc \mathbb{Q}$

۵- قسمت الف را روی محور نمایش دهید و قسمت ب را به زبان ریاضی بیان کنید. (۱)

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x \leq ۲\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid .....\}$



۶- در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{۱۳}$ و $\frac{۳}{۷}$ چه تفاوتی در ارقام بعد از ممیز مشاهده می‌شود؟ (۱)

۷- بین دو عدد $\sqrt{۳}$ و ۳ سه عدد گنگ بنویسید. (۱/۵)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) نادرست ب) درست ج) نادرست

د) درست هـ) درست و) نادرست

ز) درست ح) نادرست (هر قسمت ۰/۲۵)

۲

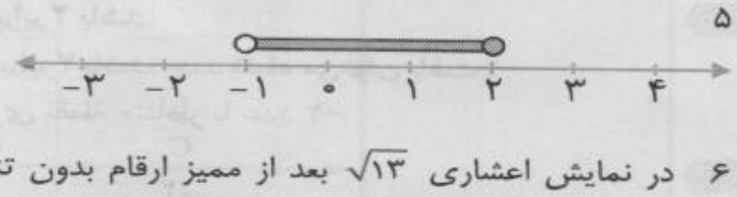
$$۱۶ < ۲۱ < ۲۵ \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{\sqrt{۱۶}} < \sqrt{۲۱} < \sqrt{۲۵} \Rightarrow ۴ < \sqrt{۲۱} < ۵ \Rightarrow -۵ < -\sqrt{۲۱} < -۴ \quad (۰/۲۵)$$

۳ الف) $\mathbb{R}$ ب) $\varnothing$ ج) $\mathbb{Q}'$ د) $\mathbb{Q}'$ (هر قسمت ۰/۵ نمره)

۴ الف) $\in$ ب) $\notin$ ج) $\in$ د) $\in$ (هر قسمت ۰/۵ نمره)

۵

(الف (۰/۵)



(ب (۰/۵) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq ۱\}$

۶ در نمایش اعشاری $\sqrt{۱۳}$ بعد از ممیز ارقام بدون تناوب هستند (۰/۵) ولی در نمایش اعشاری $\frac{۳}{۷}$ ارقام بعد از ممیز دارای یک تناوب هستند. یعنی ارقام به‌طور متناوب تکرار می‌شوند. (۰/۵)

$\sqrt{۱۳} = ۳/۶۰۵۵۵۱۲۷۵\ldots$

$\frac{۳}{۷} = ۰/۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵\ldots$

۷ چون $\underset{(۰/۲۵)}{(\sqrt{۳})^۲} = ۳$ و $\underset{(۰/۲۵)}{۳^۲} = ۹$ پس داریم:

$$۳ < ۵,۶,۷ < ۹ \Rightarrow \sqrt{۳} < \sqrt{۵}, \sqrt{۶}, \sqrt{۷} < ۳ \quad (۰/۵)$$
$$(۰/۵)$$

BIAMOZ.com

۳ درس قدر مطلق و محاسبهٔ تقریبی

چکیده درس:

نکته ۱۳: فاصله نقطه متناظر با عدد a روی محور عددهای حقیقی از مبدأ (نقطه O) را قدر مطلق آن عدد حقیقی می‌گویند و با نماد $|a|$ نمایش می‌دهند. بنابراین برای هر عدد حقیقی a یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

۱) $a > 0 \Rightarrow |a| = a$

۲) $a = 0 \Rightarrow |a| = 0$

۳) $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

مثال: قدر مطلق‌های زیر را ساده کنید.

$|2| = 2 , |-2| = 2 , |3| = 3 , |-\sqrt{2}| = \sqrt{2} , |0| = 0 , |\pi| = \pi$

نکته ۱۴: برای برخی از محاسبات لازم است مقدار تقریبی عددهای گنگ $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ را بدانیم. در مورد بقیه عددهای گنگ همین که بدانیم به چه عدد صحیحی نزدیک هستند کافی است.

$\sqrt{2} \simeq 1/4 , \sqrt{3} \simeq 1/7 , \sqrt{5} \simeq 2/2 , \sqrt{6} \simeq 2/4$

$, \sqrt{7} \simeq 2/6$

مثال: تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$|\underbrace{1-\sqrt{2}}_{\text{منفی}}| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$

$|\underbrace{\sqrt{3}-2}_{\text{منفی}}| = -(\sqrt{3}-2) = -\sqrt{3}+2$

$|\underbrace{\pi-3}_{\text{مثبت}}| = \pi-3$

$|\underbrace{2-\sqrt{2}+\sqrt{5}}_{\text{مثبت}}| = 2-\sqrt{2}+\sqrt{5}$

نکته ۱۵: با توجه به تعریف جذر، می‌توانیم این تعریف را به زبان ریاضی به صورت زیر نیز بنویسیم.

$\sqrt{a^2} = |a|$

مثال: حاصل جذرهای زیر را بنویسید.

$\sqrt{(-30)^2} = |-30| = 30$

$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$

$\sqrt{(\pi-\sqrt{2})^2} = |\pi-\sqrt{2}| = \pi-\sqrt{2}$

$\sqrt{(3-\sqrt{10})} = |3-\sqrt{10}| = -(3-\sqrt{10}) = -3+\sqrt{10}$

نکته ۱۶: چند ویژگی مهم قدر مطلق به صورت زیر است:

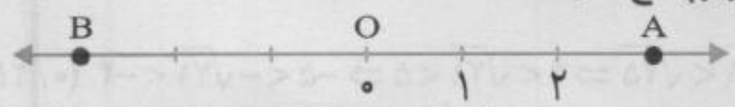
۱) $|a| = |-a|$

۲) $|x| = k \Rightarrow x = k$ یا $x = -k$

۳) $|a-b| = |b-a|$

فعالیت ۲۸

۱- با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید:



نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهند؟ نقطه A عدد ۳ و نقطه B عدد ۳- را نشان می‌دهد.

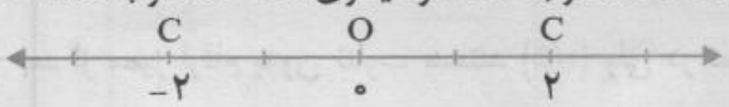
فاصلهٔ نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟ ۳ واحد

فاصلهٔ نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟ ۳ واحد

می‌خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.

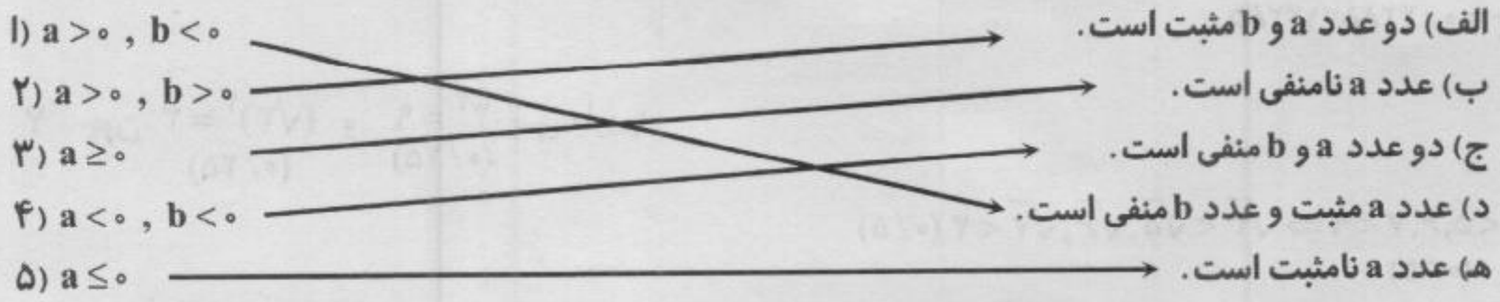
۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می‌توان یافت؟

۲ نقطه می‌توان یافت. یکی نقطه متناظر با عدد ۲ و دیگری نقطهٔ متناظر با عدد ۲-.



کار در کلاس ۲۹

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید:



BIAMOZ.com

۲- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید:

الف) $a>0 , b>0$

ب) $a<0 , b<0$

ج) $a<0 , b>0$

۱) $ab<0$

۲) $ab>0 , a+b>0$

۳) $ab>0 , a+b<0$

۳- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید:

الف) $a>0$

ب) $a>0 , b>0$

ج) $a<0$

د) $a<0 , b<0$

۱) $|a|=-a$

۲) $|a|=a$

۳) $|a+b|=a+b$

۴) $|a+b|=-(a+b)$

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید:

۱) قدر مطلق حاصلضرب دو عدد، مساوی با حاصلضرب قدر مطلق آنهاست.

$|ab|=|a||b| \xrightarrow{\text{مثال}} |۲\times(-۳)|=|۲|\times|-۳|$

۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق‌های آن دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی است.

$|a+b|\le|a|+|b| \xrightarrow{\text{مثال}} |۲+(-۳)|\le|۲|+|-۳|$

۳۱

ریاضی

فعالیت ۲۹

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است:

$\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ $\quad \sqrt{۳}\simeq ۱/۷$ $\quad \sqrt{۵}\simeq ۲/۲$

$\sqrt{۶}\simeq ۲/۴$ $\quad \sqrt{۷}\simeq ۲/۶$ $\quad \sqrt{۸}\simeq ۲/۸$

با توجه به مقادیر تقریبی صفحهٔ قبل، تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید:

$|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})=-۱+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}-۱$

دلیل: $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ پس $\sqrt{۲}-۱$ عددی منفی می‌شود:

۱) $|۲-\sqrt{۳}|=۲-\sqrt{۳}$

دلیل: چون $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$ پس $۲-\sqrt{۳}$ عددی مثبت می‌شود.

۲) $|\sqrt{۷}-\sqrt{۸}|=-(\sqrt{۷}-\sqrt{۸})=-\sqrt{۷}+\sqrt{۸}=\sqrt{۸}-\sqrt{۷}$

دلیل: چون $\sqrt{۸}>\sqrt{۷}$ پس $\sqrt{۸}-\sqrt{۷}$ منفی می‌شود.

۳) $|۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}|=۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}=\sqrt{۵}$

دلیل: چون $۲\sqrt{۵}\simeq ۴/۴$ پس $۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}$ و درنتیجه مثبت می‌شود.

۴) $|-۴-\sqrt{۳}|=-(-۴-\sqrt{۳})=۴+\sqrt{۳}$

دلیل: چون حاصل جمع دو عدد منفی، عددی منفی است پس عبارت داخل قدر مطلق منفی می‌شود.

فعالیت ۳۰

جدول زیر را کامل کنید:

$\sqrt{۳۲۵^۲}$	$\sqrt{(-۱۲۷)^۲}$	$\sqrt{(-۷)^۲}$	$\sqrt{(-۶)^۲}$	$\sqrt{۶^۲}$	$\sqrt{۳^۲}$	$\sqrt{(-۳)^۲}$	$\sqrt{a^۲}$
۳۲۵	۱۲۷	۷	۶	۶	۳	۳	حاصل

از فعالیت بالا چه نتیجه ای می گیرید؟ نتیجه می‌گیریم که جذر مربع هر عدد برابر با قدرمطلق آن عدد است.

کار در کلاس ۳۱

۱-عبارت‌های زیر را باهم مقایسه کنید:

الف) $|(-۷)^۲| \square |-۷|^۲$

ب) $|-۸+۵| \square |-۸|+|۵|$

ج) $|۳-۹| \square |۳|-|۹|$

BIAMOZ.com

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید:

$|۰| = ۰$

$\left|-\frac{۴}{۳}\right| = \frac{۴}{۳}$

$|۷^۳ - ۷^۴| = -۷^۳ + ۷^۴$ (چون $۷^۳ < ۷^۴$)

$|۰/۲^۵ - ۰/۲^۶| = ۰/۲^۵ - ۰/۲^۶$ (چون $۰/۲^۵ > ۰/۲^۶$)

یادآوری

اعداد بین صفر و یک هرچه به توان بیش‌تری برسند، کوچک‌تر می‌شوند. اما عددهای بیش‌تر از یک هرچه به توان بیش‌تری برسند بزرگ‌تر می‌شوند.

۳- حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $\sqrt{(-۲۵۹۵)^۲} = ۲۵۹۵$

ب) $\sqrt{(۱۳۹۴)^۲} = ۱۳۹۴$

ج) $\sqrt{(-۳+\sqrt{۱۰})^۲} = \underbrace{|-۳+\sqrt{۱۰}|}_{\text{مثبت}} = -۳+\sqrt{۱۰}$ (زیرا $-۳+\sqrt{۱۰}$ مثبت می‌شود.)

د) $\sqrt{(۲-\sqrt{۵})^۲} = \underbrace{|۲-\sqrt{۵}|}_{\text{منفی}} = -(۲-\sqrt{۵}) = -۲+\sqrt{۵}$ (زیرا $۲-\sqrt{۵}$ منفی می‌شود.)

تمرین

۱- اگر $a = ۰/۲۵$ ، $b = -\frac{۱}{۴}$ ، $c = ۲\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$|a+b| + ۲|a-b-c| = \underbrace{\left|۰/۲۵ + (\frac{-۱}{۴})\right|}_{۰/۲۵ - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} = ۰} + ۲\underbrace{\left|۰/۲۵ - (\frac{-۱}{۴}) - (۲\frac{۱}{۲})\right|}_{۰/۲۵ + \frac{۱}{۴} + \frac{۵}{۲} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۵}{۲} = \frac{-۴}{۲} = -۲} = |۰| + ۲|-۲| = ۰ + ۲\times ۲ = ۴$$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید:

الف) $|-۳\sqrt{۵}| = ۳\sqrt{۵}$

ب) $\underbrace{|۷-۵\sqrt{۳}|}_{\text{منفی}} = -(۷-۵\sqrt{۳}) = -۷+۵\sqrt{۳}$

ج) $|۰+\sqrt{۵}| = |\sqrt{۵}| = \sqrt{۵}$

۳- جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب‌هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید:

$|۵-۱۲| > ۱+$ ۴

۴- مقدار عددی عبارت $a+|a|$ را به ازای $a=-۲$ ، $a=۰$ و $a=۲$ به دست آورید. آیا می‌توانید عددی حقیقی به جای a قرار دهید که حاصل $a+|a|$ منفی باشد؟ خیر - زیرا حاصل $a+|a|$ هیچ‌گاه منفی نمی‌شود.

$a=-۲ \Rightarrow |-۲| + (-۲) = ۲ + (-۲) = ۰$

$a=۰ \Rightarrow |۰| + ۰ = ۰ + ۰ = ۰$

$a=۲ \Rightarrow |۲| + ۲ = ۲ + ۲ = ۴$

۵- با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^۲} = a$ را نشان دهید. فرض کنیم $a=-۳$ باشد. طبق رابطهٔ داده شده داریم:

$\sqrt{(-۳)^۲} = -۳$

در حالی‌که با محاسبه داریم:

$\sqrt{(-۳)^۲} = \sqrt{-۳\times -۳} = \sqrt{۹} = ۳$

۶- حاصل عبارات روبه‌رو را به دست آورید:

$\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲} = |\underbrace{\sqrt{۲}-۱}_{\text{مثبت}}| = \sqrt{۲}-۱$

$\sqrt{(۱-\sqrt{۱۰})^۲} = |\underbrace{۱-\sqrt{۱۰}}_{\text{منفی}}| = -(۱-\sqrt{۱۰}) = -۱+\sqrt{۱۰}$

BIAMOZ.com

ارزشیابی مستمر

۱- تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $a > ۰ \Rightarrow |a| = ...$ ب) $a = ۰ \Rightarrow |a| = ...$

ج) $a < ۰ \Rightarrow |a| = ...$

۲- اگر a عددی نامنفی باشد کدام درست است؟

الف) a مثبت است ب) a صفر است ج) a مثبت یا صفر است د) هیچکدام

۳- عبارت $|ab| = |a||b|$ را به زبان فارسی بیان کنید.

۴- تساوی‌های زیر را کامل کنید. (۱)

الف) $\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲} =$ ب) $\sqrt{(-۳۵)^۲} =$

۵- عبارت زیر را بدون قدرمطلق بنویسید. (۳)

$$|\sqrt{۲}-\sqrt{۳}| - |\sqrt{۳}-۱| - |-\sqrt{۲}| =$$

۶- در جای خالی علامت <=> قرار دهید. (۳)

الف) $۰/۲^۵ \bigcirc ۰/۲^۶$ ب) $|-۷|^۲ \bigcirc |(-۷)^۲|$

ج) $۷^۵ \bigcirc ۷^۶$ د) $۰/۶^۳ \bigcirc ۰/۷^۳$

هـ) $|-۵|+|۲| \bigcirc |-۵+۲|$ و) $|-۳|+|-۴| \bigcirc |-۳-۴|$

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) (۰/۵) $|a| = a$ ب) (۰/۵) $|a| = ۰$ ج) (۰/۵) $|a| = -a$

۲ گزینه (ج) درست است. (۰/۵)

۳ «قدرمطلق حاصل ضرب دو عدد حقیقی با حاصل ضرب قدرمطلق‌های آن دو عدد برابر است.» (۱)

۴

الف) $\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲} = |۱-\sqrt{۳}| = -۱+\sqrt{۳}$ (۰/۵)

ب) $\sqrt{(-۳۵)^۲} = |-۳۵| = ۳۵$ (۰/۵)

۵

$$\underbrace{|\sqrt{۲}-\sqrt{۳}|}_{\text{منفی}} - \underbrace{|\sqrt{۳}-۱|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|-\sqrt{۲}|}_{\text{منفی}} = -\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-(\sqrt{۳}-۱)+\sqrt{۲} = ۱$$

(۱) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۱)

۶ (هر قسمت این سؤال ۰/۵ نمره)

الف) $۰/۲^۵ \boxed{>} ۰/۲^۶$ ب) $|-۷|^۲ \boxed{=} |(-۷)^۲|$ ج) $۷^۵ \boxed{<} ۷^۶$

د) $۰/۶^۳ \boxed{<} ۰/۷^۳$ هـ) $|-۵|+|۲| \boxed{>} |-۵+۲|$ و) $|-۳|+|-۴| \boxed{=} |-۳-۴|$

BIAMOZ.com

آزمون تلفیقی

مبحث: فصل دوم　　مدت: .....　　تاریخ: ...../...../.....

۱- درون جای خالی علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید. ۱

$-\frac{۷}{۳} \bigcirc \mathbb{Z}$　　$\frac{۳}{۵} \bigcirc \mathbb{R}$　　$\sqrt{۰/۹} \bigcirc Q'$　　$\sqrt{۲۵} \bigcirc Q$

۲- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۱

الف) هر عدد حقیقی عددی گنگ است.

ب) صورت اعشاری عددهای گویا، یا مختوم است یا متناوب.

ج) قدر مطلق هر عددی، عددی مثبت می‌شود.

د) عددی وجود دارد که هم گویاست و هم گنگ است.

۳- عبارت «قدر مطلق مجموع دو عدد مختلف العلامت از مجموع قدرمطلق‌های آن دو عدد کوچک‌تر است» را به زبان ریاضی بنویسید. ۰/۵

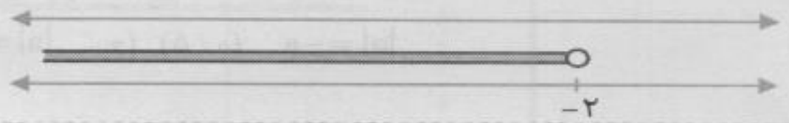
۴- بین دو عدد $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۷}$ دو عدد گویا بنویسید. ۱

۵- اعداد $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{-۱}{۲}$ و ۰ و $\frac{-۳}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید ۱

۶- مجموعه A را روی محور نشان دهید و مجموعه B را به زبان ریاضی مشخص کنید. ۱

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \leq x < ۳\}$

$B = \{$　　$\}$



۷- آیا رابطه $a + |a| > ۰$ همواره درست است؟ چرا؟ ۰/۵

۸- عبارت‌های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید. (۲) ۲

الف) $|-۴ \times ۳ \div ۲ + ۳ \times \frac{۱}{۳}|$　　ب) $|۲ - \pi|$

ج) $|۲ - \sqrt{۲}|$　　د) $|\sqrt{۳} + \sqrt{۲}|$

۹- حاصل عبارت زیر را بیابید. ۲

$$-\frac{۱۱}{۵} + \frac{۳ - \frac{۱}{۳}}{۳ + (-\frac{۱}{۳})}$$

پاسخ آزمون تلفیقی فصل دوم

۱ هر مورد (۰/۲۵)

$-\frac{۷}{۳} \notin \mathbb{Z}$　　$\frac{۳}{۵} \in \mathbb{R}$　　$\sqrt{۰/۹} \in Q'$　　$\sqrt{۲۵} \in Q$

۲ الف) نادرست　　ب) درست　　ج) درست　　د) نادرست (هر مورد ۰/۲۵)

۳

$ab < ۰, |a+b| < |a| + |b|$

(۰/۲۵)　　(۰/۲۵)

BIAMOZ.com

۴

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۲}{۵}=\frac{۱۴}{۳۵}\xrightarrow[\times ۳]{}\frac{۲}{۵}=\frac{۴۲}{۱۰۵}\ (۰/۲۵)\\ \frac{۳}{۷}=\frac{۱۵}{۳۵}\xrightarrow[\times ۳]{}\frac{۳}{۷}=\frac{۴۵}{۱۰۵}\ (۰/۲۵)\end{array}\right\}\Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{\frac{۲}{۵}<\frac{۴۳}{۱۰۵}},\underset{(۰/۲۵)}{\frac{۴۴}{۱۰۵}<\frac{۳}{۷}}$$

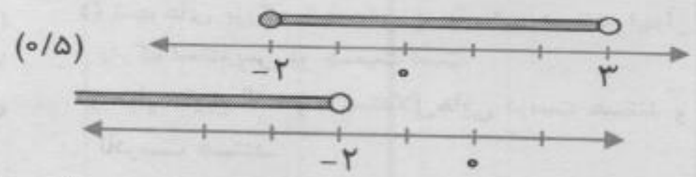
۵ مخرج مشترک ۶۰ را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{ccccccccc}\frac{۳}{۴} & , & -\frac{۳}{۵} & , & ۰ & , & -\frac{۱}{۲} & , & \frac{۲}{۳}\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ \frac{۴۵}{۶۰} & , & -\frac{۳۶}{۶۰} & , & ۰ & , & -\frac{۳۰}{۶۰} & , & \frac{۴۰}{۶۰}\end{array}\Rightarrow \underset{(۰/۵)}{-\frac{۳}{۵}<-\frac{۱}{۲}<۰<\frac{۲}{۳}<\frac{۳}{۴}}$$

۶

$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۲\le x<۳\}\Rightarrow$ (۰/۵)

$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-۲\}$ (۰/۵)



۷ خیر (۰/۲۵)– زیرا اگر $a=۰$ و یا a عددی منفی باشد، آنگاه $a+|a|=۰$. (۰/۲۵)

۸

الف) $|-۴\times ۳\div ۲+۳\times\frac{۱}{۳}|=|-۶+۱|=|-۵|=۵$ (۰/۵)

ب) $|۲-\pi|=-(۲-\pi)=-۲+\pi$ (۰/۵)

ج) $|۲-\sqrt{۲}|=۲-\sqrt{۲}$ (۰/۵)

د) $|\sqrt{۳}+\sqrt{۲}|=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ (۰/۵)

۹

$$-\frac{۱۱}{۵}+\frac{۳-\frac{۱}{۳}}{۳+(-\frac{۱}{۳})}=\underset{(۰/۵)}{-\frac{۱۱}{۵}+\frac{\frac{۸}{۳}}{\frac{۸}{۳}}}=-\frac{۱۱}{۵}+۱=-\frac{۶}{۵}\quad (۰/۵)$$

$۳-\frac{۱}{۳}=\frac{۹-۱}{۳}=\frac{۸}{۳}$ (۰/۵)

$۳+(-\frac{۱}{۳})=\frac{۹-۱}{۳}=\frac{۸}{۳}$ (۰/۵)

BIAMOZ.com

فصل ۲ استدلال و اثبات در هندسه

درس ۱ استدلال

چکیده درس:

نکته ۱: دلیل آوردن برای معلوم شدن یک موضوع مجهول، با استفاده از داشته‌های درست قبلی را استدلال می‌گویند.

نکته ۲: استدلالی که درستی یک موضوع را نتیجه بدهد اثبات نامیده می‌شود.

نکته ۳: استفاده حواس پنجگانه برای استدلال در ریاضیات کافی نیست و باید استدلال براساس داشته‌های قبلی ما که مورد قبول هستند، صورت پذیرد.

مثال: اگر چند مثلث رسم کنیم و سپس ارتفاع‌های آن‌ها را بکشیم و محل تقاطع ارتفاع‌های همهٔ آنها درون مثلث‌ها قرار گیرد، باز هم به طور قطع نمی‌توان گفت که محل برخورد همه ارتفاع‌های مثلث درون مثلث است.

مثال: اگر با استفاده از چشم بگوییم دو شکل همنهشت هستند، درست نیست. چون حواس در استدلال ریاضی کارایی ندارند. همین‌طور اندازه‌گیری برای ایجاد اطمینان از همنشهتی دو مثلث کافی نیست.

مثال: کدام استدلال درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر باران ببارد زمین خیس می‌شود. زمین خیس نیست پس باران نباریده است.

ب) همهٔ سکه‌هایی که من پرتاب کردم «رو» آمدند، پس سکه بعدی هم که پرتاب خواهم کرد حتماً «رو» می‌آید.

ج) هر مربع یک متوازی الاضلاع است. پس در متوازی‌الاضلاع‌ها هر چهار ضلع برابرند.

د) شهرهای بزرگ شهرهای پرجمعیتی هستند. تهران شهری بزرگ است پس پر جمعیت است.

در موارد فوق الف و د استدلال‌هایی درست هستند و ب و ج نادرست هستند.

نکته ۴: مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی یا یک ادعا نادرست است را مثال نقض می‌گوییم.

۳۳

فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌ها پاسخ دهید:

۱- امیر و محسن برای دیدن یک مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت: «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقهٔ من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید: «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که: «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه من باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟ خیر، درست نیست. زیرا همیشه نمی‌توان از روی نتایج گذشته یک قانون کلی برای آینده بیان کرد. چرا که همه شرایطی که در گذشته بوده است، ثابت باقی نمانده‌اند.

۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی‌متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

مساحت بیسکویت عباس $= ۴ \times ۸ = ۳۲$ سانتی‌مترمربع

مساحت بیسکویت باقر $= ۶ \times ۶ = ۳۶$ سانتی‌مترمربع

چون هر دو بیسکویت از یک نوع هستند و مساحت بیسکویت باقر بیش‌تر از مساحت بیسکویت عباس است پس، مقدار بیسکویت باقر بیشتر است.

۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام قابل اطمینان‌تر است. دلیلی که محسن آورده بود چندان معتبر نیست. اما دلیلی که ما درفعالیت ۲ آوردیم به خاطر آنکه براساس دانش ریاضی بود و درستی آن از قبل پذیرفته شده است، قابل اطمینان‌تر است.

۳۳

کار در کلاس

۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی باتوجه به رویدادهای گذشته، نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نیست.

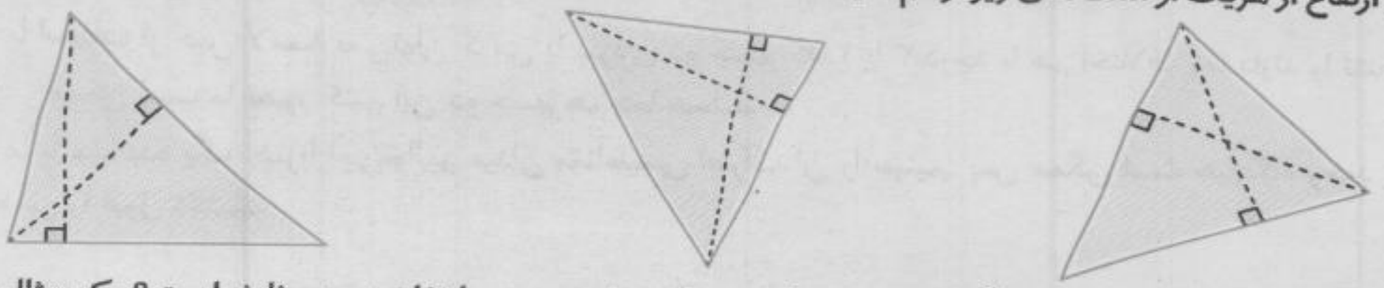
شخصی ده بار سکه‌ای را پرتاب کرده است که هر ده بار «رو» آمده است. او نتیجه می‌گیرد که بار یازدهم نیز باید سکه «رو» بیاید.

BIAMOZ.com

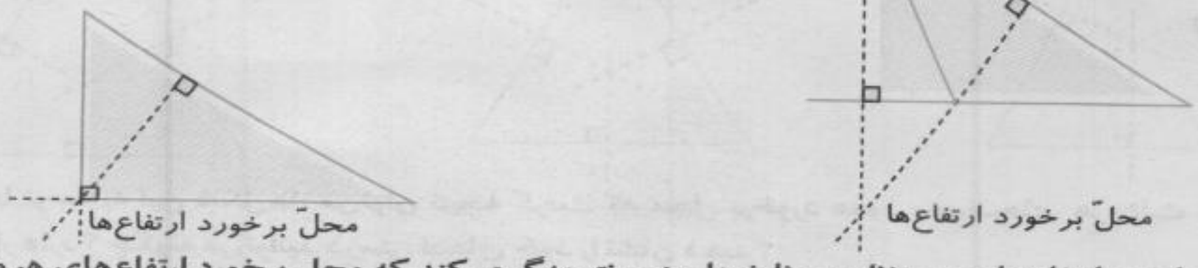
شخصی هر بار هندوانه خریده است، درون هندوانه سرخ بوده است. ادعا می‌کند اگر این بار هم هندوانه بخرد درون آن سرخ خواهد بود.

شخصی پنج بار متوالی که با اتومبیل خود از خانه خارج شده است، دچار سانحه رانندگی شده است، نتیجه‌گیری می‌کند که حتماً فردا نیز اگر با اتومبیل از خانه خارج شود، تصادف خواهد کرد.

۲- دو ارتفاع از هریک از مثلث‌های زیر، رسم کنید:



آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟ یک مثال بزنید که نتیجهٔ بالا را نقض کند. خیر – مثلاً در مثلث قائم‌الزاویه محل برخورد ارتفاع‌ها روی رأس زاویه قائمه است. و یا در مثلث‌هایی که دارای یک زاویه باز هستند، نقطه برخورد ارتفاع‌ها بیرون از مثلث است.



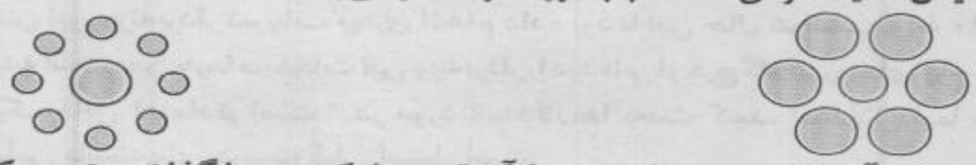
اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟

این فرد مشابه استدلال محسن در فعالیت شماره یک استدلال کرده است.

۳۴ فعالیت

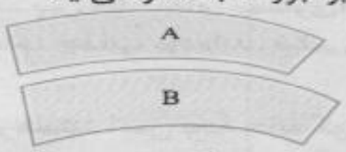
۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟

الف) با مشاهده تشخیص دهید. قرص سمت چپ بزرگ‌تر به‌نظر می‌رسد.



ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازهٔ آنها را با هم مقایسه کنید. با این کار متوجه می‌شویم که هر دو قرص به یک اندازه هستند.

۲- اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از شیرینی مورد علاقه شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعهٔ بزرگ‌تر کدام است؟) قطعه B را انتخاب می‌کنم زیرا بزرگ به نظر می‌آید.



با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟ با استفاده از کاغذ شفاف و عمل انطباق متوجه می‌شویم که دو قطعه با هم برابرند.

۳- آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟

خیر، زیرا مشاهده و استفاده از حس‌های پنج گانه در برخی موارد با خطا و اشتباه همراه است.

BIAMOZ.com

کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کند. در مورد نتایجی که از این مثال‌ها می‌گیرید با یکدیگر بحث کنید.

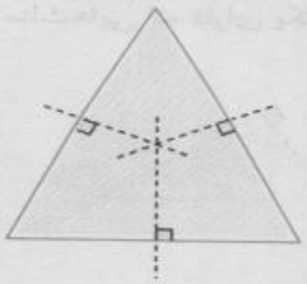
– گوش‌ها قابلیت شنیدن صدای برخی از موجودات (مثل مورچه) را ندارد. بنابراین ممکن است ما فکر کنیم، مورچه‌ها صدایی از خود منتشر نمی‌کنند.

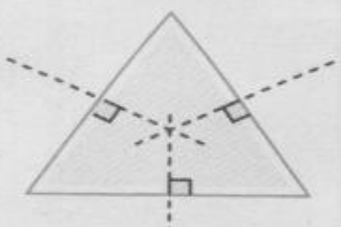
– با استفاده از حس لامسه نمی‌توان گرمی یا سردی دو جسم که ۲ یا ۳ درجه با هم اختلاف دما دارند را تشخیص داد و ممکن است ما تصور کنیم این دو جسم هم دما هستند.

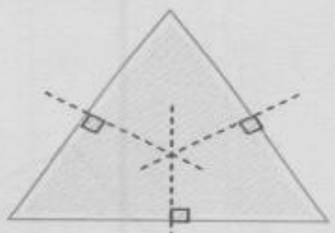
– ما با مشاهده یک آهنربا نمی‌توانیم میدان مغناطیسی اطراف آن را ببینیم. پس ممکن است هیچگاه وجود چنین میدانی را قبول نکنیم.

تمرین

۱- در شکل‌های زیر عمود منصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید:

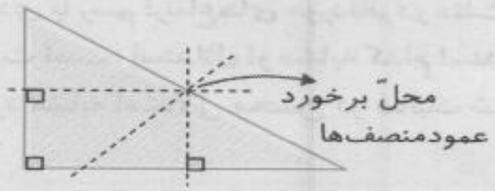






آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمود منصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟

خیر – با ارائه یک مثال نقض نشان می‌دهیم که این نتیجه‌گیری نادرست است. مثلاً در مثلث قائم‌الزاویه محل برخورد عمودمنصف‌ها روی ضلع بزرگ‌تر (وتر) می‌باشد و درون مثلث نیست.



۲- نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری قصد بلند کردن وزنه‌ای ۱۰۰ کیلویی را داشت. آن‌ها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نیما: **زیرا هفتهٔ پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این حال نتوانست وزنهٔ ۹۰ کیلویی را بلند کند.**

پژمان: **امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه‌بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.**

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال‌ها بحث کنید. استدلال نیما معتبرتر است. زیرا این استدلال براساس دانسته‌های درست قبلی استوار است.

۳- چون من تا به حال هیچ‌وقت تصادف نکرده‌ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

این استدلال مشابه کدام‌یک از استدلال‌های زیر است؟ قسمت ج، زیرا در این مورد هم مانند استدلال صورت سؤال از مجموعه معدودی اطلاعات، یک نتیجه‌گیری کلی انجام شده است.

الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.

ب) همهٔ فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود، پس فیلم جنگی بوده است.

ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچهٔ خالهٔ کوچکم هم دختر خواهد بود.

د) چون همهٔ قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

۴- دونفر دربارهٔ چهار برادر به نام‌های علی، حسن، حسین و باقر می‌دانستند که: علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

BIAMOZ.com

اولی: در تمام خانواده‌هایی که من دیده‌ام که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، فرزند بزرگ‌تر را علی نامیده‌اند.

دومی: چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید. استدلال دومی درست است. نفر اول همه خانواده‌های ممکن را ندیده و از روی تعداد محدودی خانواده استدلال کرده است. پس معتبر نیست. ولی استدلال نفر دوم براساس معیارهای درست و منطقی انجام شده است که به زمان و مکان بستگی ندارد و محدودیت نیز ندارد.

ارزشیابی مستمر

۱- جای خالی را پر کنید. (۱نمره)

« ..... یعنی دلیل آوردن برای ..... موضوعی که برای ما مجهول بوده است.»

۲- کدام استدلال درست است؟ (۲)

الف) چون همهٔ فرزندان عموی من پسر هستند پس فرزند بعدی آن‌ها نیز پسر خواهد بود.

ب) چون در همهٔ مثلث‌ها مجموع زاویه‌های داخلی 180° است پس در مثلث‌های قائم‌الزاویه نیز مجموع زاویه‌های داخلی 180° است.

ج) اگر قد A از B بلندتر باشد و قد B از C بلندتر باشد آنگاه قد A از C بلندتر است.

د) اگر $A = B$ و $A = C$ باشد، آنگاه $B = C$ است.

۳- آیا با استفاده از حواس پنجگانه برای استدلال به طول کامل می‌توان اطمینان کرد؟ (۱)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ استدلال (۰/۵) – معلوم شدن (۰/۵) ۲ الف) نادرست (۰/۵) ب) درست (۰/۵) ج) درست (۰/۵) د) درست (۰/۵)

۳ خیر به طور کامل نمی‌توان اطمینان کرد زیرا حواس پنجگانه در بسیاری از موارد با خطا عمل می‌کنند. (۱)

۲ درس آشنایی با اثبات در هندسه

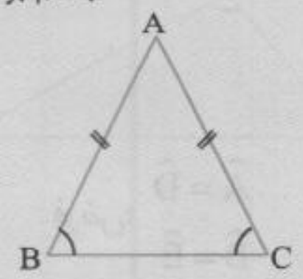
چکیده درس

✪ نکته ۵: در یک مسئله به اطلاعاتی که مسئله به ما داده است فرض گفته می‌شود و خواسته مسئله را حکم می‌نامند.

نکته ۶: برای اثبات در هندسه باید از فرض‌ها و همچنین حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم است استفاده کنیم و به خواسته مسئله برسیم.

مثال: فرض و حکم را در مسئله زیر مشخص کنید و سپس آن‌ها را به زبان ریاضی بنویسید. «در هر مثلث متساوی الساقین، زاویه‌های مجاور قاعده برابرند.»

فرض	مثلث ABC متساوی الساقین است.	زبان ریاضی ⟶	$AB = AC$
حکم	زاویه‌های مجاور قاعده با هم برابرند.	زبان ریاضی ⟶	$\hat{B} = \hat{C}$



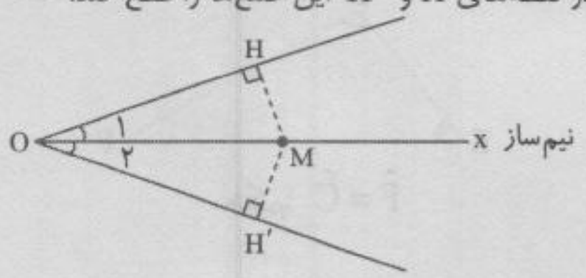
نکته ۷: «دو شیء مساوی با یک شیء خودشان با هم برابرند». این مطلب یکی از حقایق پذیرفته شده است که می‌توانیم از آن برای استدلال استفاده کنیم. به زبان ریاضی:

$$\left.\begin{matrix} A = B \\ C = B \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = C$$

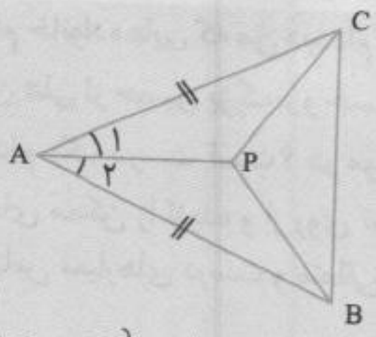
نکته ۸: هنگامی که می‌خواهیم موضوعی را برای هر عضو از یک مجموعه ثابت کنیم، کافی است ابتدا یک عضو دلخواه از آن مجموعه را انتخاب کرده و مطلب را برای آن ثابت کنیم. سپس با توجه به اینکه همهٔ اعضای آن مجموعه تمام ویژگی‌های آن عضو دلخواه را دارند مطلب را برای تمام اعضای آن مجموعه تعمیم دهیم.

مثال: ثابت کنید فاصله هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

اثبات: نقطه دلخواه M را روی نیم‌ساز زاویه O (OX) انتخاب می‌کنیم. از آن دو عمود بر ضلع‌های زاویه O رسم می‌کنیم تا در نقطه‌های H و H' این ضلع‌ها را قطع کند.



BIAMOZ.com



$$\left.\begin{array}{ll} AC = AB & \text{(فرض)} \\ AP = AP & \text{(مشترک)} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & \text{(APنیمساز)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{A}PC = \overset{\Delta}{A}PB \Rightarrow PC = PB$$

$$\left.\begin{array}{ll} MO = MO & \text{(مشترک)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{(OX نیمساز)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وتر و یک زاویه تند)}}$$

$$\overset{\Delta}{OHM} \cong \overset{\Delta}{OH'M} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} HM = H'M$$

فاصلهٔ M از دو ضلع زاویه برابر است.

چون این مطلب را برای نقطه دلخواه M ثابت کردیم و بقیه نقاط روی نیم‌ساز هم با این نقطه از نظر ویژگی‌ها تفاوتی ندارند، پس این مطلب برای هر نقطه از نیم‌ساز درست است.

مثال: در شکل مقابل نشان دهید مثلث PBC متساوی الساقین است. (AD نیمساز زاویه Aاست.)

فعالیت

۱- به گفت و گوی زیر توجه کنید:

مهرداد: **آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو باهم برابر است؟**

سعید: **بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، باهم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.**



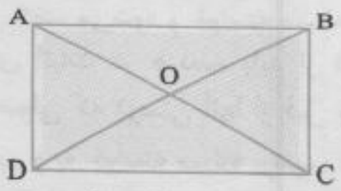
در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را زیر کامل کنید:

فرض: شکل لوزی است **حکم:** زاویه‌های روبه‌رو برابر است.

استدلال:

در لوزی زاویه‌های روبه‌رو برابرند $\Rightarrow$ { لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است. / در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو برابر است. }

۲- اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئلهٔ زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید:



فرض: ABCD مستطیل است.

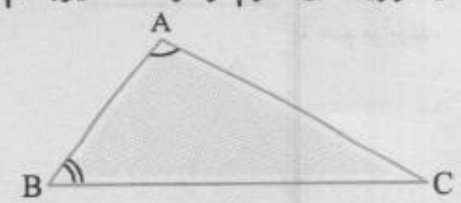
حکم: قطرهای مستطیل، مساوی است.

$$\text{فرض}: \begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AB = DC \quad AD = BC \\ AB \parallel DC \quad AD \parallel BC \end{cases} \quad \text{و} \quad \text{حکم}: AC = BD$$

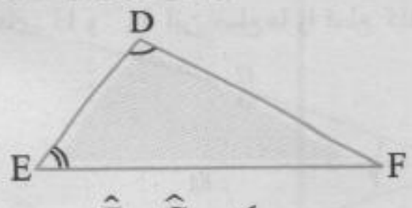
کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید:

۱- در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز باهم برابر است.



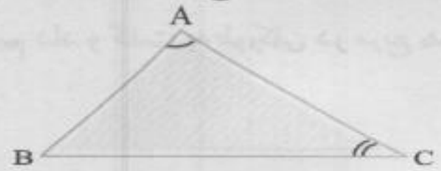
فرض: $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$



حکم: $\hat{F} = \hat{C}$

BIAMOZ.com

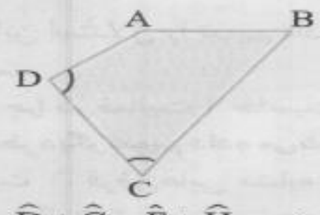
۲- اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است. از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.



فرض: $\hat{A} > \hat{C}$

حکم: $BC > AB$

۳- اگر مجموع دو زاویه از چهار ضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهار ضلعی EFGH برابر باشد، ثابت کنید مجموع دو زاویهٔ دیگر ABCD با مجموع دو زاویهٔ دیگر EFGH برابر است.



فرض: $\hat{D} + \hat{C} = \hat{F} + \hat{H}$

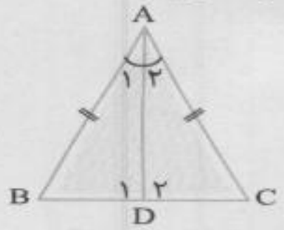


حکم: $\hat{A} + \hat{B} = \hat{E} + \hat{G}$

فعالیت ۳۹

۱- در مسئلهٔ زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید:

مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است و AD نیمساز زاویهٔ A است. ثابت کنید AD میانه نیز هست:



فرض: AD نیمساز زاویه A از مثلث متساوی الساقین ABC است.

حکم: $BD = DC$

استدلال: **چون AD نیمساز زاویه A است پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است، پس مثلث‌های ADB و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) با هم همنهشتند. پس اجزای متناظر آنها برابر است، در نتیجه: BD=DC.**

استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی‌الساقین نیم‌ساز وارد بر قاعده، میانه هم هست. آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیم‌ساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیم‌ساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد.

نادرستی این استدلال در آنجاست که از نیم‌ساز بودن AD، نتیجه شده است $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$. در حالی که AD نیم‌ساز زاویه A است و فقط می‌توان از آن نتیجه گرفت $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

اصلاح استدلال: چون AD نیم‌ساز زاویه A است پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. از طرفی چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است پس ساق‌های آن برابرند یعنی AB=AC . همچنین AD ضلع مشترک دو مثلث است. پس دو مثلث ADB و ADC بنابرحالت (ض ز ض) با هم برابرند. پس اجزای متناظر آنها نیز برابرند و در نتیجه BD=DC. پس AD میانه وارد بر BC است.

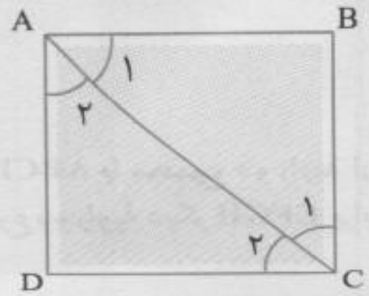
خیر – نمی‌توان نتیجه گرفت که نیم‌ساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن است. زیرا زاویه B همان شرایط زاویه A را ندارد. (زاویه رأس نیست) پس نمی‌توان خصوصیات A را برای B نیز تعمیم داد.

۲- با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است.

چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع همنهشت است، زوایای متناظر باهم برابر است؛ بنابراین

BIAMOZ.com

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا AC نیمساز است. آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طورکلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟

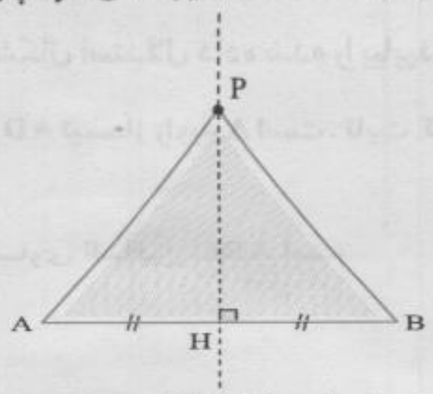


بله می‌توان این استدلال را تعمیم داد. زیرا همان فرض‌ها و شرایطی که برای قطر AC برقرار است برای قطر BD نیز برقرار است.

۳- به نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت مورد نظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود، اما در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می‌شود؟

زیرا در فعالیت ۱، فرض‌هایی مشابه با آنچه در استدلال به کار برده بودیم برای تعمیم به سایر نیم‌سازها برقرار نبود، ولی در فعالیت ۲ همهٔ فرض‌های مورد نظر برای قطر دیگر نیز برقرار بود.

۴- نقطه‌ای مانند P روی عمود منصف پاره‌خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره خط وصل می‌کنیم، چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ز ض) همنهشت است، نتیجه می‌شود پاره‌خط‌های PA و PB باهم برابر است.



بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ P، که روی عمود منصف پاره خط AB است از دو سر پاره خط AB یکسان است.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجهٔ بالا برای «هر» نقطهٔ روی عمود منصف برقرار است، کافی است؟

بله کافیست. زیرا نقطه p یک نقطه دلخواه روی عمودمنصف بود و هر نقطه دیگر نیز همین ویژگی‌های نقطه p را داراست.

کار در کلاس ۴۰

به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر آورده‌اند:

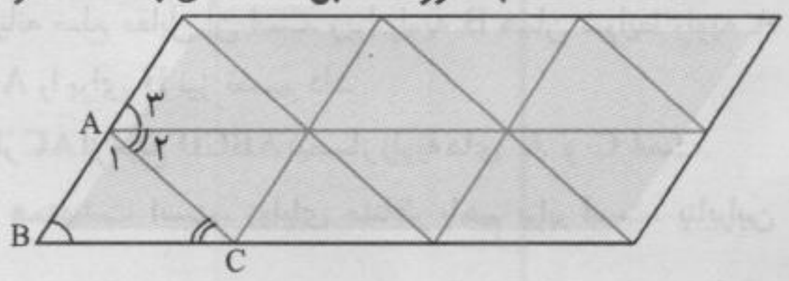
مسئله مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث ۱۸۰° است.

استدلال حامد: **حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را درنظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه ۶۰° است، مجموع زاویه‌های مثلث ۱۸۰° است.**

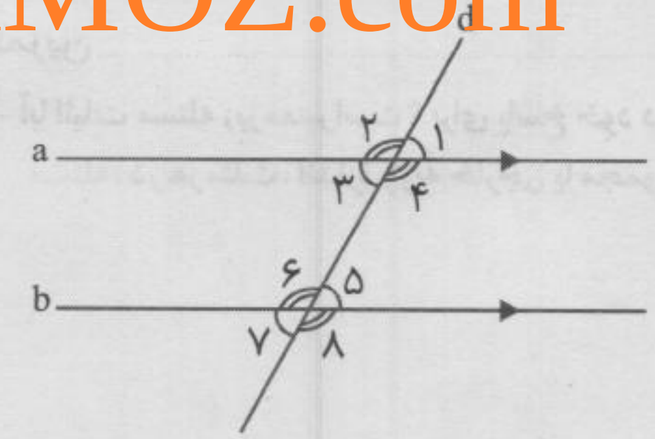
استدلال حسین: **حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آن‌ها را اندازه گرفت و دید که در همهٔ آن‌ها مجموع زوایای داخلی برابر ۱۸۰° است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.**

استدلال مهدی: **مهدی شکل زیر، که از مثلث‌های همنهشت تشکیل شده است را کشید و با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC به صورت مقابل، استدلالی با استفاده از شکل به‌صورت زیر آورد:**

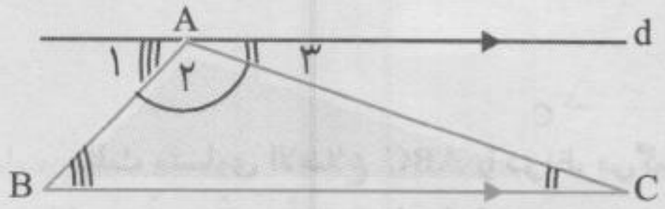
$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}_2 = 180^\circ$$



BIAMOZ.com



استدلال رضا: رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آن‌ها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی است.»



حال مثلثی دلخواه مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ را در نظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویهٔ تشکیل شده در رأس A را با شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویهٔ $\hat{A}_2$ همان زاویهٔ A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم $\hat{B} = \hat{A}_1$ و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم $\hat{C} = \hat{A}_3$ پس با جای‌گذاری $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_3$ به ترتیب به جای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ خواهیم داشت: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$

استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی به صورت مرتب و خلاصه بدین صورت نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{و} \\ AB \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1 \qquad \left.\begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{و} \\ AC \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

دربارهٔ معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید. استدلال رضا معتبرتر است. زیرا استدلال حامد فقط برای مثلث متساوی‌الاضلاع است. استدلال حسین با وسایل اندازه‌گیری بوده است و اندازه‌گیری همیشه با خطا همراه است. استدلال‌های مهدی با اینکه براساس دانسته‌های سال گذشته است اما به طور کامل جزئیات استدلال در آن بیان نشده است.

فعالیت ۴۱

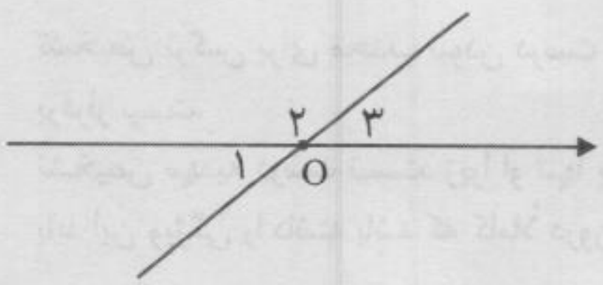
مسئله: **حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز ۵۰۰۰ تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.** پول هر دوی آنها با هم برابر است. چرا که مجموع پول هر دوی آنها با پول بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان شده است.

بین استدلالی که برای مسئلهٔ قبل و مسئلهٔ بعدی هست، چه شباهتی می‌بینید؟

در مسئله بعدی نیز مجموع زاویه‌های $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابر 180° است و مجموع زاویه‌های $\hat{O}_3$ و $\hat{O}_2$ نیز 180° است. یعنی مجموع دو عدد مختلف با یک عدد به‌طور جداگانه مقداری ثابت شده است.

مسئله: نشان دهید زاویه‌های متقابل‌به‌رأس با هم برابر است.

فرض کنیم $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ مانند شکل زیر متقابل به‌رأس باشد، داریم:



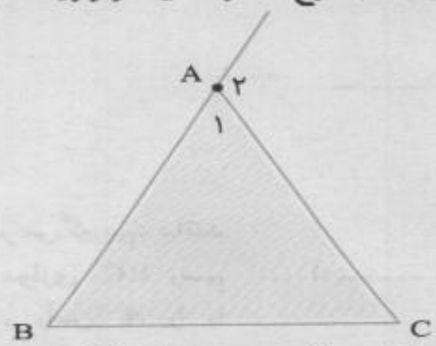
$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \\ \hat{O}_3 + \hat{O}_2 = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_3 + \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

BIAMOZ.com

تمرین

۱- آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

مسئله: **در هر مثلث، اندازهٔ زاویهٔ خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن برابر است.**

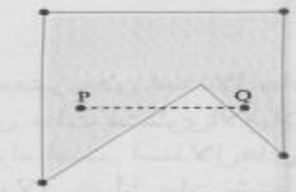


اثبات: **مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است و زوایای $\hat{A}_1$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هرکدام ۶۰° است، بنابراین**

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180 \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$
$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

خیر– این اثبات معتبر نیست. زیرا در صورت مسئله گفته شده «در هر مثلث» اما در اثبات، مثلث «متساوی‌الاضلاع» در نظر گرفته شده است که یک حالت خاص است.

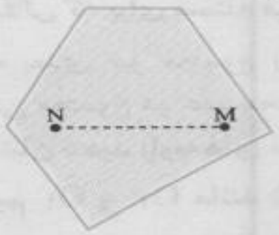
۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی‌های محدب آشنا شدید. تعریف چند ضلعی محدب را می‌توان بدین صورت هم آورد: «یک چند ضلعی محدب است اگر هر پاره خطی که دو نقطهٔ دلخواهِ درون آن چند ضلعی را به هم وصل می‌کند، به‌طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» چند ضلعی که محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص‌های دو دانش‌آموز در مورد محدب و مقعر بودن چند ضلعی‌های زیر و دلایلی که ارائه کرده‌اند باتوجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



نرگس: **چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد.**



مهدیه: **چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط T و S درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد.**



مریم: **چند ضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد.**

تشخیص نرگس برای محدب نبودن درست است. زیرا مثالی ارائه کرده است که شرایط تعریف محدب بودن در آن برقرار نیست.

تشخیص مهدیه درست نیست. زیرا او تنها یک پاره‌خط را درنظر گرفته است درحالی که طبق تعریف هر پاره‌خطی باید این ویژگی را داشته باشد که کاملاً درون شکل قرار بگیرد.

BIAMOZ.com

تشخیص مریم درست است اما دلیلی که ارائه کرده است درست نیست. زیرا در تعریف گفته شده است «هر پاره خط که دو نقطه از درون آن چند ضلعی را به هم وصل کند» اما مریم فقط یک پاره خط را ملاک محدب بودن قرار داده است.

۳- آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف)
هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.
چهار ضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.
⇐ ABCD مستطیل است.

این نتیجه‌گیری نادرست است. زیرا هر متوازی‌الاضلاعی مستطیل نیست. به بیان بهتر از مستطیل بودن می‌توان متوازی‌الاضلاع بودن را نتیجه گرفت ولی از متوازی‌الاضلاع بودن نمی‌توان مستطیل بودن را نتیجه‌گیری کرد.

ب)
در هر مربع، ضلع‌ها باهم برابرند.
ABCD مربع نیست.
⇐ همهٔ ضلع‌های ABCD، باهم برابر نیستند.

این نتیجه‌گیری نادرست است. زیرا در لوزی هم ضلع‌ها با هم برابرند. از آنجا که ABCD مربع نیست ممکن است لوزی باشد و نتیجه‌گیری نابرابر بودن ضلع‌های آن نادرست است.

ج)
در هر مربع، ضلع‌ها باهم برابرند.
در چهار ضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند.
⇐ ABCD مربع نیست.

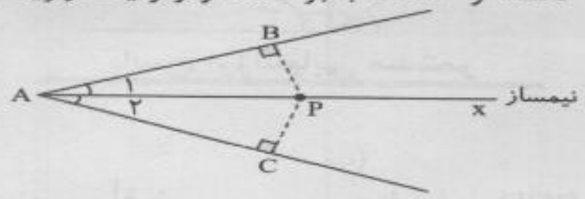
این نتیجه‌گیری درست است. زیرا یک شرط مربع بودن چهار ضلعی ABCD برابر بودن ضلع‌هایش است و این شرط برقرار نیست.

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

یادآوری: **فاصلهٔ یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط عمود می‌شود.**

راهنمایی: **یک زاویهٔ دلخواه بکشید و نیم‌ساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیم‌ساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصلهٔ این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این نتیجه برای همهٔ نقاط روی نیم‌ساز درست است را بیان کنید.**

اثبات: نقطه دلخواه P را روی نیم‌ساز زاویه A در نظر می‌گیریم. سپس از P دو عمود براضلاع زاویه A رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویه $\hat{ABP}$ و $\hat{ACP}$ بنابر حالت وتر و یک زاویه تند همنهشت هستند. زیرا :



$$\left.\begin{array}{l} AP = AP \quad \text{(وتر مشترک)} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad \text{(Ax نیم‌ساز زاویه A است)} \end{array}\right\} \longrightarrow \hat{APB} \cong \hat{APC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} BP = CP$$

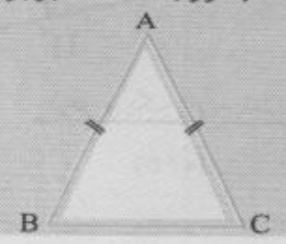
چون CP=BP است پس فاصلهٔ P از دو ضلع زاویه A به یک اندازه است.

از آنجا که نقطه P دلخواه بود، پس هر نقطه‌ای روی نیم‌ساز زاویه A می‌تواند باشد. پس این نتیجه برای همهٔ نقاط روی نیم‌ساز درست است.

ارزشیابی مستمر

۱- در عبارت‌های زیر فرض و حکم را مشخص کنید. (۴ نمره)

الف) در هر مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده برابرند.

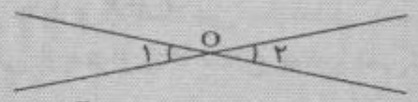


BIAMOZ.com

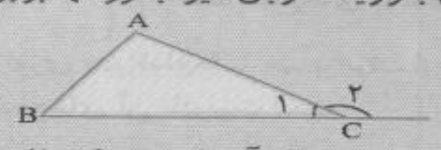
ب) در هر مستطیل قطرها با هم برابرند.



ج) دو زاویه متقابل به رأس با هم برابرند.

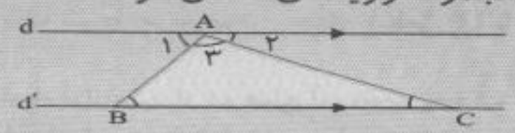


د) در هر مثلث مجموع دو زاویه داخلی با زاویه خارجی غیرمجاور آنها برابر است.



۲- ثابت کنید هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. (۲)

۳- استدلال زیر را کامل کنید. (۲/۵) «مجموعه زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.»

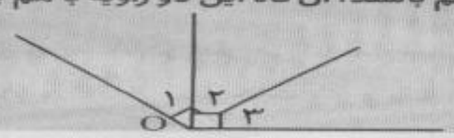


$\Rightarrow \hat{A}_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ (..... و AB مورب)

$\Rightarrow \hat{A}_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ ($d \parallel d'$ و AC مورب)

$\Rightarrow \hat{A}_3 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_3 + \ldots + \ldots = 180^\circ$

۴- ثابت کنید اگر دو زاویه دارای یک متمم باشند. آن‌گاه این دو زاویه با هم برابرند. (۱/۵)



نهم (دورهٔ اول متوسطه)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱

الف)

مثلث ABC متساوی‌الساقین است	فرض
$(\hat{B} = \hat{C})$ زاویه‌های مجاور به قاعده برابرند	حکم

(۱)

ب)

چهارضلعی ABCD مستطیل باشد	فرض
$(AC = BD)$ قطرها با هم برابرند	حکم

(۱)

ج)

O_1 و O_2 متقابل به رأس‌اند	فرض
$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$	حکم

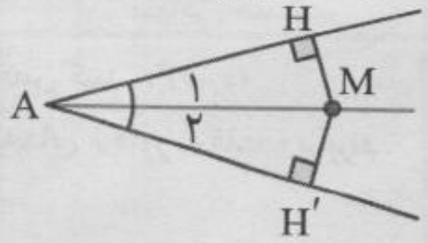
(۱)

د)

ABC مثلث است	فرض
$\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$	حکم

(۱)

۲ نقطه دلخواه M را روی نیم‌ساز زاویه A درنظر می‌گیریم.



$AM = AM$ (مشترک)

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (فرض، نیمساز)

(۰/۵)

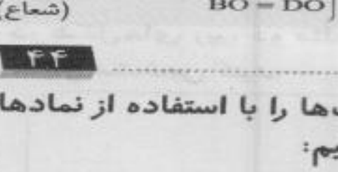
$\xrightarrow[(۰/۵)]{\text{(وتر و یک زاویه تند)}}$ $\overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{AMH'} \Rightarrow MH = MH'$ (۰/۵) (۰/۵)

BIAMOZ.com

۳

$$\left.\begin{array}{l}(\text{مورب } AB \text{ و } d \parallel d') \ (۰/۵) \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B} \ (۰/۵) \\ (\text{مورب } AC \text{ و } d \parallel d') \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C} \ (۰/۵)\end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(۰/۵)}{\hat{A}_۳ + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_۳ + \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۱۸۰^\circ}$$

۴



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \underset{(۰/۵)}{\Rightarrow} \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۳$$

۳ درس همنهشتی مثلث‌ها

چکیده درس:

نکته ۹: برای اثبات همنهشتی دو مثلث کافی است نشان دهیم یکی از حالت‌های زیر برقرار است.

الف) نشان دهیم سه ضلع مثلث اول با سه ضلع مثلث دوم برابر است. (ض ض ض)

ب) نشان دهیم دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلث اول با دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلث دوم برابر است. (ض ز ض)

ج) نشان دهیم دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث اول با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث دوم برابر است. (ز ض ز)

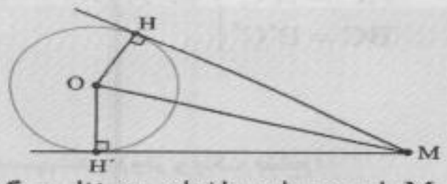
نکته ۱۰: برای اثبات همنهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه، به جز سه حالت بالا، می‌توان از دو حالت زیر هم استفاده کرد:

الف) نشان دهیم وتر و یک ضلع از مثلث اول با وتر و یک ضلع از مثلث دوم برابر است.

ب) نشان دهیم وتر و یک زاویه تند از مثلث اول با وتر و یک زاویه تند از مثلث دوم برابر است.

نکته ۱۱: همنهشتی مثلث یکی از ابزارهایی است که در هندسه برای اثبات برابری دو پاره‌خط یا دو زاویه از آن استفاده می‌شود. به این ترتیب که ابتدا یک شکل مناسب برای مسئله داده شده رسم می‌کنیم و سپس خواسته مسئله را روی شکل پیدا می‌کنیم و با استفاده از همنهشتی دو مثلث خواسته مسئله را (که در اجزای متناظر به آن می‌رسیم) اثبات می‌کنیم.

مثال: ثابت کنید اندازه دو مماسی که از نقطه‌ای بیرون دایره، بر دایره رسم می‌شود با هم برابر است.



اثبات: نقطه M را بیرون دایره دلخواهی در نظر می‌گیریم و از آن دو مماس MH و MH′ را بر دایره رسم می‌کنیم. باید ثابت کنیم $MH = MH'$. برای این کار از O دو شعاع OH و OH′ را رسم کرده و از M به O وصل می‌کنیم. حال نشان می‌دهیم دو مثلث OHM و OH′M هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{ll}OM = OM & (\text{مشترک}) \\ OH = OH' & (\text{شعاع})\end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{وتر و یک ضلع})}$$

$$\overset{\Delta}{OHM} \equiv \overset{\Delta}{OH'M} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MH = MH'$$

مثال: در شکل زیر نشان دهید $AB = CD$

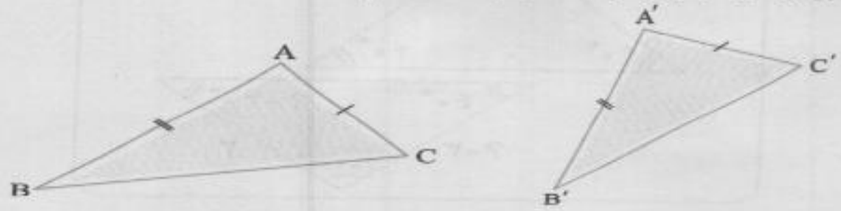


اثبات: نشان می‌دهیم دو مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ و $\overset{\Delta}{COD}$ همنهشت هستند و سپس از اجزای متناظر آنها بهره می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{ll}\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ & (\text{متقابل به راس}) \\ AO = CO & (\text{شعاع}) \\ BO = DO & (\text{شعاع})\end{array}\right\} \underset{(\text{ض ز ض})}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{AOB} \equiv \overset{\Delta}{COP} \Rightarrow AB = CD$$

یادآوری

با مفهوم همنهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه‌نویسی کنیم. مثلاً حالت همنهشتی (ض ز ض) را این‌گونه نمایش می‌دهیم:

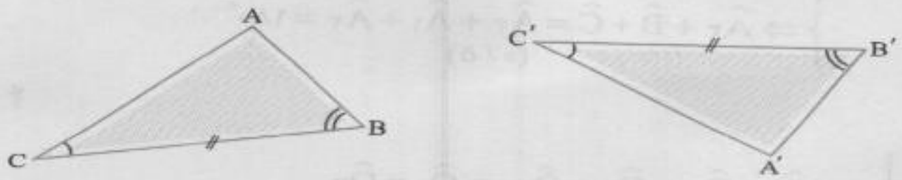


$$\left.\begin{array}{l}AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}'\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \equiv \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

BIAMOZ.com

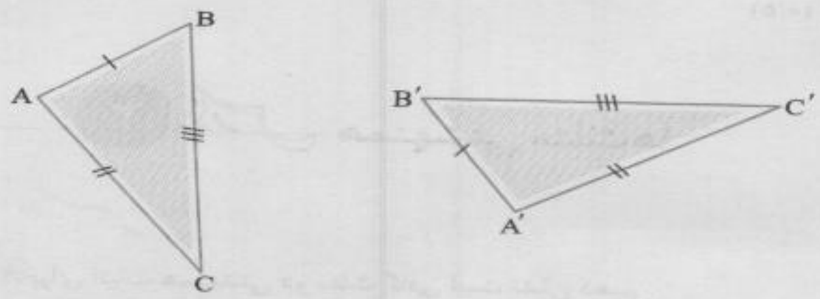
برای یادآوری، دوحالت دیگرهمنهشتی مثلث‌ها و دو حالت همنهشتی ویژهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه را به‌همین صورت بیان کنید.

حالت همنهشتی (ز ض ز)



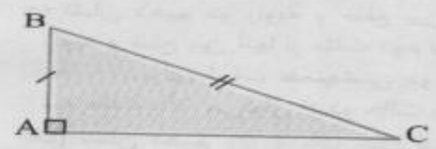
$$\left.\begin{matrix} BC = B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \equiv \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

حالت همنهشتی (ض ض ض)

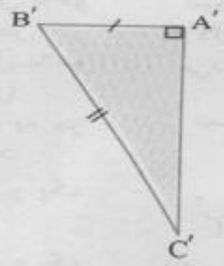


$$\left.\begin{matrix} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \equiv \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

حالت همنهشتی (وتر و یک ضلع)

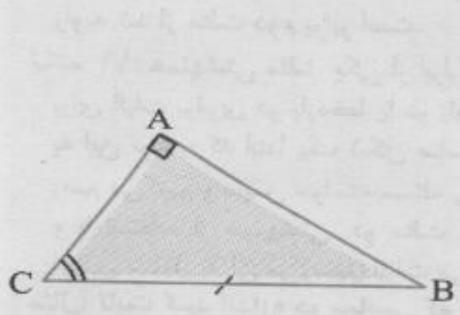


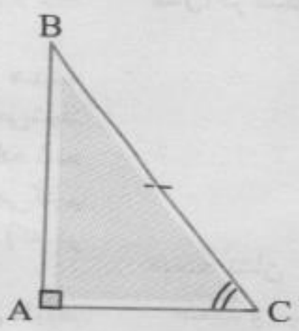
$$\left.\begin{matrix} BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \equiv \overset{\Delta}{A'B'C'}$$



$$\left\{\begin{matrix} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{matrix}\right\}$$

حالت هم‌نهشتی (وتر و یک زاویهٔ تند)



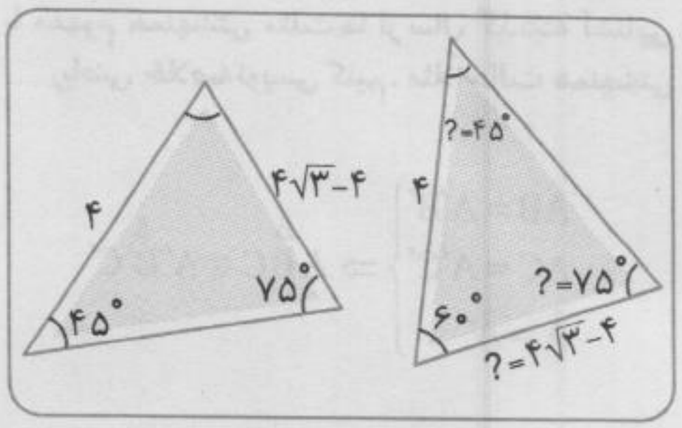


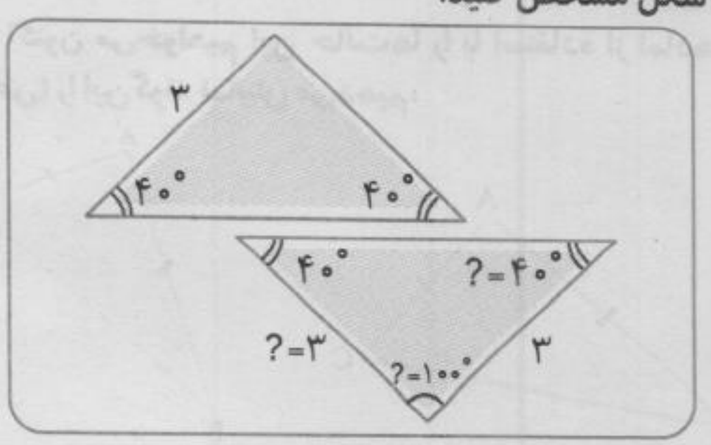
$$\left.\begin{matrix} BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \equiv \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

۴۴

فعالیت

۱- در شکل‌های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید:

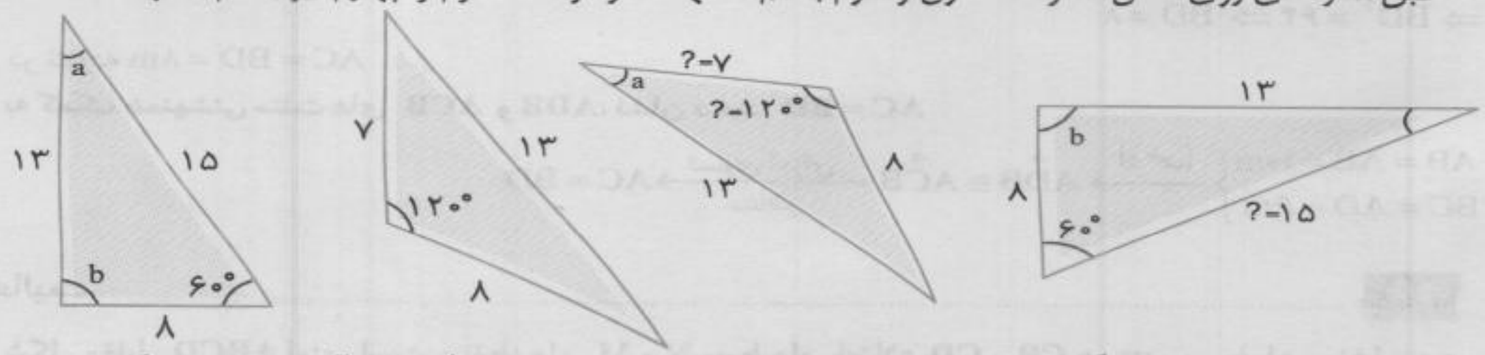




BIAMOZ.com

۲- در شکل زیر چهار مثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. ابتدا مثلث‌های همنهشت را مشخص کنید و سپس اندازه‌های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید. (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده، با هم مساوی‌اند).

طبق اندازه‌های روی شکل‌ها دو مثلث اول و سوم با هم همنهشت و دو مثلث دوم و چهارم نیز با هم همنهشت هستند.

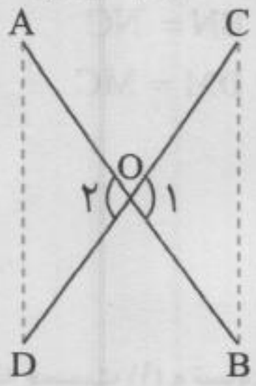


مثال: با رحل‌های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آن‌ها داریم که دو لایهٔ چوبی آن از وسط هم گذشته است. می‌خواهیم نشان دهیم که این تکیه‌گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصلهٔ دو لبهٔ کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که: $OA = OB$ و $OC = OD$

(چرا؟) چون طبق فرض مسئله، دو لایه چوبی آن از وسط هم گذشته‌اند.

حکم این است که: $AD = BC$. زوایای $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند (چرا؟) چون زاویه‌های متقابل به رأس با هم برابرند.

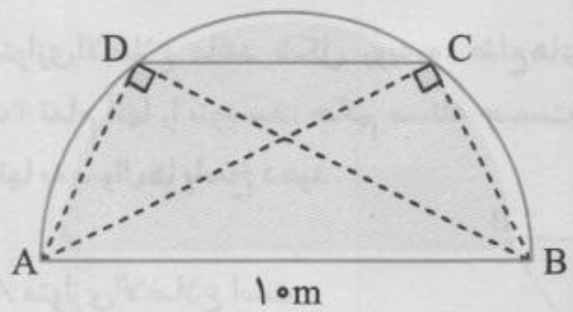
پس مثلث‌های OAD و OBC همنهشت هستند و از آنجا درستی حکم بدست می‌آید، یعنی:



$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OC = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow OBC \overset{\Delta}{\cong} OAD \Rightarrow AD = BC$$

فعالیت ۴۵

در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم‌دایره هست که بچه‌ها برای بازی از پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصلهٔ ابتدای پل (نقطهٔ A) از انتهای آن (نقطهٔ B) ۱۰ متر است. ترانه روی پلهٔ C نشسته است که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد ($BC = ۶$) و شهرزاد روی پلهٔ D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل برابر باشد؛ یعنی $AC = BD$. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.



۱- نشان دهید زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ در شکل، قائمه است. طول‌های AC و BD را به کمک قضیهٔ فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC = BD$.

زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ به این دلیل قائمه هستند که هر دو زاویه‌هایی محاطی و روبه‌رو به قطر هستند. یعنی زاویه‌های محاطی روبه‌روی کمان ۱۸۰°. بنابراین طبق ویژگی زاویه‌های محاطی، اندازه آنها نصف کمان روبه‌رویشان است، هر دو باید ۹۰° باشند.

BIAMOZ.com

$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow AC^2 + ۶^2 = ۱۰^2 \Rightarrow AC^2 + ۳۶ = ۱۰۰$

$\Rightarrow AC^2 = ۶۴ \Rightarrow AC = ۸m$

$BD^2 + AD^2 = AB^2 \Rightarrow BD^2 + ۶^2 = ۱۰^2 \Rightarrow BD^2 + ۳۶ = ۱۰۰$

$\Rightarrow BD^2 = ۶۴ \Rightarrow BD = ۸$

در نتیجه $AC = BD = ۸m$

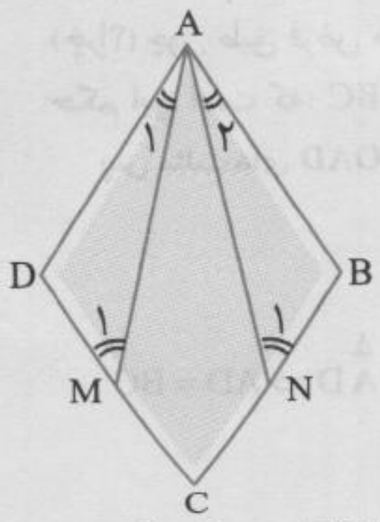
۲- به کمک همنهشتی مثلث‌های ACB و ADB، نشان دهید $AC = BD$

$$\left.\begin{matrix} AB = AB = ۱۰m \\ BC = AD = ۶m \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(و\ ض)} \overset{\triangle}{ADB} \cong \overset{\triangle}{ACB} \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} AC = BD$$

فعالیت ۴۶

در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم $\overset{\triangle}{ADM} \cong \overset{\triangle}{ABN}$.

۱- با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید:



فرض: $\begin{cases} AD = AB = BC = CD \ , \ BN = NC \\ \hat{A} = \hat{C} \ , \ \hat{B} = \hat{D} \ , \ DM = MC \end{cases}$

حکم: $\overset{\triangle}{ADM} \cong \overset{\triangle}{ABN}$

۲- باتوجه به نتیجه قسمت (۱) و تساوی‌های قسمت اول ثابت کنید مثلث‌های ABN و ADM همنهشت‌اند.

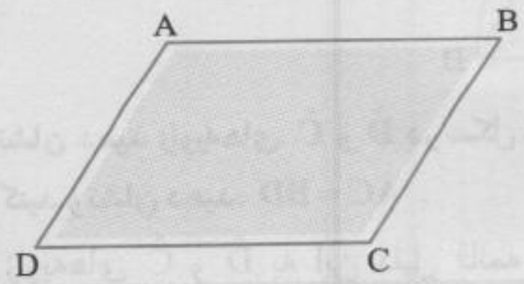
$$\left.\begin{matrix} AD = AB \\ DM = BN \\ \hat{D} = \hat{B} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(ض\ ز\ ض)} \overset{\triangle}{ADM} \cong \overset{\triangle}{ABN}$$

۳- حال با توجه به همنهشتی دو مثلث ABN و ADM اجزای متناظر آن‌ها را بنویسید.

$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$, $\hat{M}_۱ = \hat{N}_۱$, $AM = AN$

کار در کلاس ۴۶

می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابر است. مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله در ادامه، نظر چند دانش‌آموز را ببینید و باتوجه به آنها به سوال‌ها پاسخ دهید.



فرض	چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.
حکم	AB=DC و AD=BC

شهرزاد: معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است، با چشم هم می‌توان دید!

شبنم: در تعریف متوازی‌الاضلاع، برابری ضلع‌های روبه‌رو را می‌دانستیم. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

BIAMOZ.com

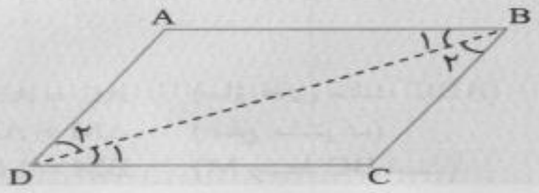
• آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟

خیر، زیرا گاهی اوقات آنچه توسط چشم دیده می‌شود همراه با خطا و اشتباه است.

• به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل، در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟

خیر، در تعریف متوازی‌الاضلاع فقط موازی بودن ضلع‌های مقابل وجود داشت. با اندازه‌گیری هم نمی‌توان درستی یک حکم را ثابت کرد، زیرا عمل اندازه‌گیری همراه با خطا است که این خطا هم از جانب فرد اندازه‌گیری‌کننده است و هم از جانب وسیله اندازه‌گیری.

ترانه: به نظر من باید دو مثلث همنهشت بیابیم و با اثبات همنهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع برسیم. امّا در شکل دو مثلث نداریم. پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطرها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.



اثبات را به‌صورت زیر کامل کنید:

$$\left.\begin{array}{rl} AB \parallel CD \text{ ، مورب } BD & \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AD \parallel BC \text{ ، مورب } BD & \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ BD = BD & \text{(ضلع مشترک)} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{ABD} \equiv \hat{CBD} \quad \text{(ز ض ز)}$$

با توجه به همنهشتی دو مثلث ABD و CBD تساوی‌های زیر را کامل کنید.

دیدیم که $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ ، بنابراین داریم: $AD = BC$ و $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$ بنابراین داریم: $AB = DC$

• چرا برای اثبات همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ز ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟ چون تنها فرض مسئله موازی بودن اضلاع بود و در مورد تساوی اضلاع چیزی نمی‌دانستیم. در واقع تساوی اضلاع چیزی بود که ما باید آن را اثبات می‌کردیم و نمی‌توانستیم از آن استفاده کنیم.

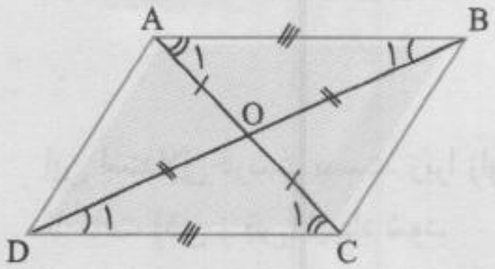
• با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به‌دست آوریم؟ بله، زیرا با رسم قطر AC همان شرایط موجود برای قطر BD برقرار خواهد بود.

• از همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع به‌جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجهٔ دیگری هم دربارهٔ زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید.

• در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، مساوی‌اند.

تمرین ۴۸

۱- ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: $OA = OC$ و $OB = OD$.

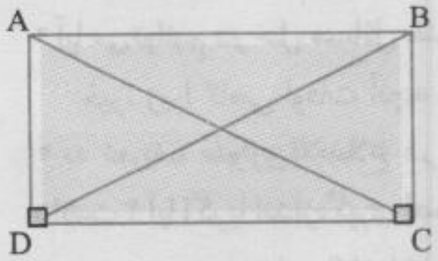


$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \overset{\Delta}{AOB} \equiv \overset{\Delta}{DOC} \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$$

۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!)

روش اول: دو مثلث ADC و BDC هر دو قائم‌الزاویه هستند و ضلع DC در هر دو مشترک است. از طرفی چون ABCD مستطیل هم هست پس $AD = BC$. طبق رابطه فیثاغورس داریم:

BIAMOZ.com



$$\left.\begin{matrix} AD^2+DC^2=AC^2 \\ BC^2+DC^2=BD^2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{BC=AD} AC^2=BD^2 \Rightarrow AC=BD \Rightarrow$$

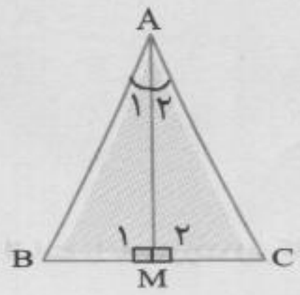
قطرها برابرند.

روش دوم: چون ABCD یک متوازی‌الاضلاع هم هست پس AD=BC داریم:

$$\left.\begin{matrix} AD=BC \\ DC=DC \quad (\text{مشترک}) \\ \hat{D}=\hat{C}=90^\circ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{ADC} \equiv \overset{\Delta}{BDC} \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} AC=BD$$

۳- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی همنهشت هستند؟

به حالت (ض ض ض). زیرا:



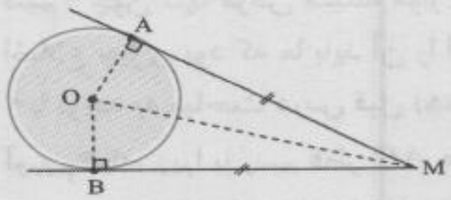
$$\left.\begin{matrix} AC=AB & (\text{ساق‌های مثلث ABC}) \\ AM=AM & (\text{ضلع مشترک}) \\ BM=MC & (\text{M وسط BC است}) \end{matrix}\right\} \longrightarrow \overset{\Delta}{AMB} \equiv \overset{\Delta}{AMC}$$

چرا AM نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است؟ چرا AM بر BC عمود است؟

از تساوی اجزای متناظر دو مثلث AMB و AMC نتیجه می‌گیریم که $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ که نشان می‌دهد AM نیمساز زاویه A است. هم‌چنین نتیجه می‌گیریم $\hat{M}_1=\hat{M}_2$. از آنجا که $\hat{M}_1 \oplus \hat{M}_2 = 180^\circ$ پس $\hat{M}_1=\hat{M}_2=90^\circ$.

۴- از نقطه M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازه این دو مماس با هم برابر است؟ درستی ادعای خود را نشان دهید. (راهنمایی: از مرکز دایره به نقطه‌های A ، M و B وصل کنید.)

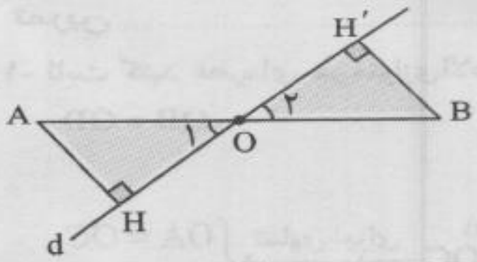
می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$. در دو مثلث قائم‌الزاویه OAM و OBM داریم:



$$\left.\begin{matrix} OM=OM & (\text{وتر مشترک}) \\ OA=OB & (\text{شعاع دایره هستند}) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(\text{و ض})} \overset{\Delta}{OAM} \equiv \overset{\Delta}{OBM}$$

$$AM=BM \Rightarrow \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}}$$ مماس‌ها با هم برابرند

۵- در شکل مقابل خط d از وسط پاره‌خط AB گذشته و A و B از d به یک فاصله‌اند ($AH=BH'$) ثابت کنید $OH=OH'$. در مورد درستی یا نادرستی استدلال زیر برای تساوی $OH=OH'$ بحث کنید:



$$\left.\begin{matrix} OA=OB & (\text{طبق فرض}) \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 & (\text{متقابل به رأس}) \\ AH=BH' & (\text{فرض}) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{OAH} \equiv \overset{\Delta}{OBH'} \Rightarrow OH=OH'$$

این استدلال درست نیست. زیرا زاویه‌های O_1 و O_2 بین ضلع‌های مساوی $OA=OB$ و $AH=BH'$ نیستند تا حالت (ض ز ض) ایجاد شود.

این استدلال را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم: دو مثلث AHO و BH′O قائم‌الزاویه هستند.

$$\left.\begin{matrix} AO=BO & (\text{فرض}) \\ AH=BH' & (\text{فرض}) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(\text{و ض})} \overset{\Delta}{OAH} \equiv \overset{\Delta}{OBH'} \Rightarrow OH=OH'$$

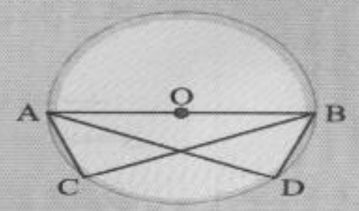
BIAMOZ.com

ارزشیابی مستمر

۱- ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. (۲ نمره)

۲- ثابت کنید در هر دایره وترهای نظیر دو کمان مساوی با هم مساوی‌اند. (۲)

۳- در شکل مقابل وترهای AC و BD برابرند. ثابت کنید $BC = AD$. (۲)



۴- ثابت کنید در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن برابر است. (۱/۵)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱



$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (۰/۵) ($AD \parallel BC$ و AC مورب)

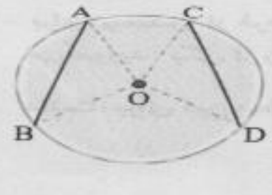
$\hat{D}_1 = \hat{B}_1$ (۰/۵) ($AB \parallel DC$ و BD مورب) $\xrightarrow{\text{(زض‌ز)}}$

$AD = BC$ (۰/۵) (فرض)

(۰/۲۵)

$\Rightarrow A\hat{O}D \equiv B\hat{O}C \Rightarrow \begin{cases} AO = CO \\ BO = DO \end{cases}$ (۰/۲۵) قطرها یکدیگر را نصف کرده‌اند.

۲ از مرکز دایره (نقطه O) به نقاط A و B و C و D وصل می‌کنیم. چون دو کمان AB و CD برابرند و هر دو کمان مقابل به زاویه مرکزی هستند پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$، داریم:



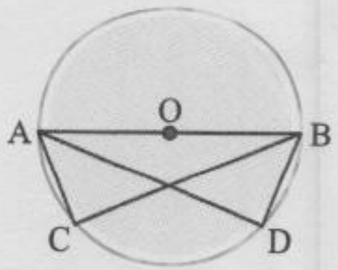
$AO = CO$ (۰/۲۵) (شعاع)

$BO = DO$ (۰/۲۵) (شعاع)

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (۰/۲۵) (فرض)

$\xrightarrow[\text{(زض‌ز)}]{\text{(۰/۵)}} A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D \Rightarrow AB = CD$ (۰/۵)

۳



$AC = BD$ (۰/۲۵) (فرض)

(روبه‌رو به کمان ۱۸۰°)

$\hat{C} = \hat{D} = 90°$ (۰/۲۵)

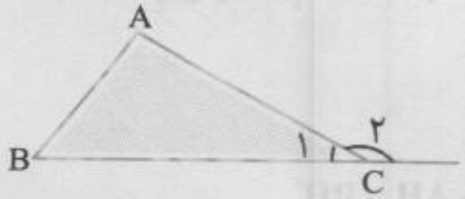
$AB = AB$ (۰/۲۵) (مشترک)

$\xrightarrow[\text{(۰/۵)}]{\text{وتر و یک ضلع}}$

$A\hat{B}C \equiv A\hat{B}D \Rightarrow AD = BC$ (۰/۵)

(۰/۵)

۴



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180°$ (۰/۲۵)

$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180°$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2$ (۰/۵)

BIAMOZ.com

۴ درس حل مسئله در هندسه

چکیده درس:

نکته ۱۲: مراحل حل یک مسئله در هندسه را می‌توان به صورت زیر فهرست کرد. امّا توجه کنید که برای حل مسائل هندسی راه‌حل کلی وجود ندارد.

گام ۱) صورت مسئله را خوانده و اجزای آنها را به دقت بشناسید.

گام ۲) اگر مسئله دارای شکل نیست، با توجه به داده‌های مسئله برای آن شکل مناسبی را رسم کنید.

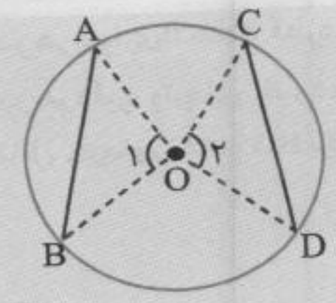
گام ۳) با توجه به شکلی که رسم کرده‌اید، فرض و حکم مسئله را به زبان ریاضی مشخص کنید.

گام ۴) حال با استفاده از حقایق و اصولی که درستی آنها را می‌دانید از فرضیات مسئله، حکم مسئله را نتیجه بگیرید. استفاده از مثلث‌های همنهشت نیز می‌تواند در این راه کارگشا باشد.

نکته ۱۳: توجه کنید که در حل مسائل هندسه گاهی اوقات لازم است که یک خط یا یک پاره‌خط را به شکل اضافه کنیم تا مسئله با استفاده از دانسته‌های قبلی ما قابل حل باشد.

مثال: ثابت کنید در هر دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند.

دایره‌ای دلخواه به مرکز O را به همراه دو وتر مساوی AB و CD رسم می‌کنیم.



حکم: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

فرض: $AB = CD$

اثبات: از O به دو سر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم.

$AB = CD$ (فرض)

$OA = OC$ (شعاع)

$OB = OD$ (شعاع)

(ض ض ض) ⟵

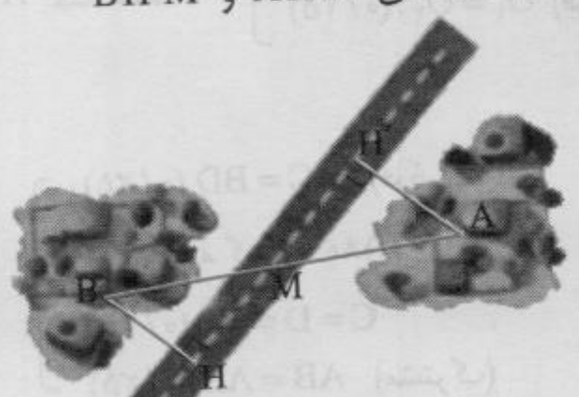
$\overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD}$ ⟵ اجزای متناظر ⟵ $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$

$\hat{O}_۲, \hat{O}_۱$ زاویه مرکزی هستند ⟵ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

سؤال متن

۵۰

۴- برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آن‌ها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره‌خط، استفاده از مثلث‌های همنهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟ مثلث‌های $\overset{\Delta}{AHM}$ و $\overset{\Delta}{BH'M}$



با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

$MA = MB$ (طبق فرض)

$\hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ$ (وتر و یک زاویهٔ حاده)

$\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$ (متقابل به رأس)

$\Rightarrow \overset{\Delta}{AHM} \cong \overset{\Delta}{BH'M} \Rightarrow AH = BH'$

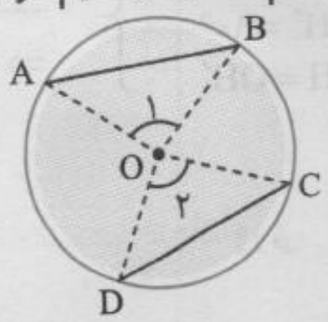
BIAMOZ.com

فعالیت ۵۰

در شکل مقابل وترهای AB و CD باهم مساوی است.

۱- نشان دهید کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی است.

از نقطه O به نقاط A و B و C و D وصل می‌کنیم. نشان می‌دهیم دو مثلث AOB و DOC همنهشت هستند.

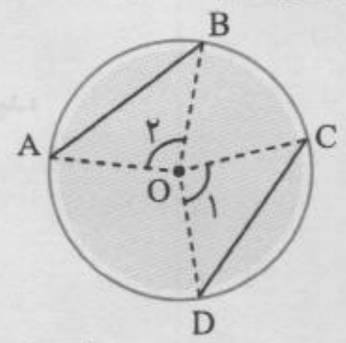


$$\left.\begin{array}{ll} AO = OD & \text{(شعاع‌های دایره)} \\ BO = CO & \text{(شعاع‌های دایره)} \\ AB = CD & \text{(فرض)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{DOC} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

چون $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ زاویه‌های مرکزی هستند و می‌دانیم اندازه هر زاویه مرکزی برابر با کمان روبه‌روی آن است پس نتیجه می‌گیریم که $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$.

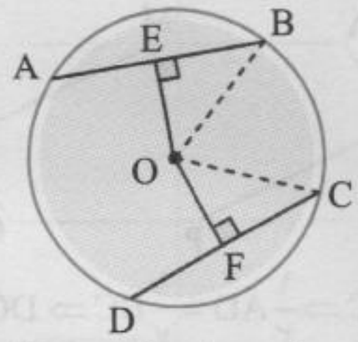
۲- در شکل مقابل کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی است. نشان دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

اثبات: از نقطه O بر A و B و C و D وصل می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{ll} \overline{OA} = \overline{OD} & \text{(شعاع)} \\ \overline{OB} = \overline{OC} & \text{(شعاع)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{(کمان‌های } \overset{\frown}{AB} \text{ و } \overset{\frown}{CD} \text{ برابرند.)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

۳- از سال گذشته می‌دانید که خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود شود، وتر را نصف می‌کند. باتوجه به این موضوع، نشان دهید مرکز دایره از دو وتر مساوی به یک فاصله است.



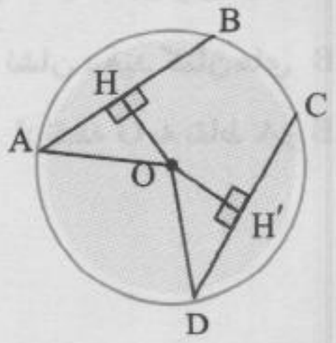
از نقطه O دو پاره‌خط OE و OF را رسم می‌کنیم طوری‌که در نقاط E و F بر وترهای AB و DC عمود باشند.
سپس از O به نقاط B و C وصل می‌کنیم تا دو مثلث قائم‌الزاویه OEB و OFC ایجاد شود.

$$\left.\begin{array}{ll} OB = OC & \text{(شعاع‌های دایره هستند)} \\ EB = FC & \text{(چون AB=DC و E و F وسط AB و DC هستند)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(و ض)}} \overset{\Delta}{OEB} \cong \overset{\Delta}{OFC} \Rightarrow OE = OF$$

یعنی فاصله O از AB و DC برابر است.

BIAMOZ.com

۴- در شکل مقابل می‌دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یک فاصله است $(OH = OH')$. مرکز دایره را به A و D وصل کنید و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید که طول‌های دو وتر AB و CD باهم برابر است:



$$\left.\begin{array}{l} OA = OD \quad (\text{شعاع}) \\ \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \\ OH = OH' \quad (\text{فرض}) \end{array}\right\} \longrightarrow \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{ODH'} \Rightarrow AH = DH'$$
$$\Rightarrow ۲AH = ۲\ DH' \Rightarrow AB = CD$$

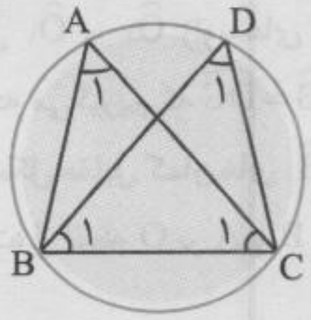
یادآوری

در هر دایره شعاع عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند.

۵۱

کار در کلاس

در شکل مقابل می‌دانیم $AB = CD$ ،



۱- چرا $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ؟ چون وترهای نظیر این دو کمان با هم برابرند.

۲- جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید:

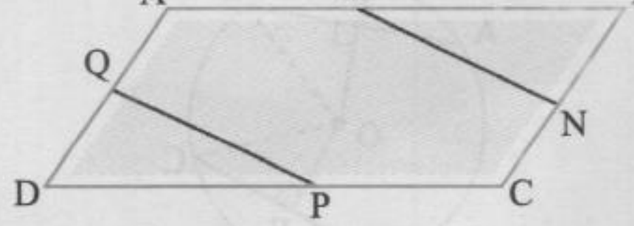
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \\ \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} \end{array}\right.$$
$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{DCB}$$

۳- چرا $AC = BD$ ؟ چون این دو وتر روبه‌روی دو کمان $\overset{\frown}{ABC}$ و $\overset{\frown}{BCD}$ هستند که با هم برابرند.

تمرین

۱- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع است، ثابت کنید:

$MN = PQ$



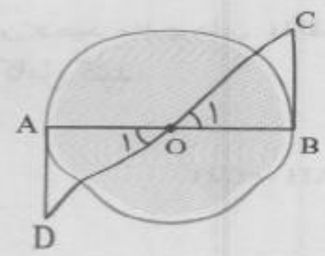
$AD = BC \Rightarrow \frac{۱}{۲}AD = \frac{۱}{۲}BC \Rightarrow DQ = BN$ (ضلع‌های مقابل متوازی‌الاضلاع)

$AB = DC \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}DC \Rightarrow BM = DP$ (ضلع‌های مقابل متوازی‌الاضلاع)

$$\left.\begin{array}{l} MB = DP \\ DQ = BN \\ \hat{D} = \hat{B} \end{array}\right\} \longrightarrow \overset{\Delta}{DQP} \cong \overset{\Delta}{BMN} \Rightarrow MN = PQ$$

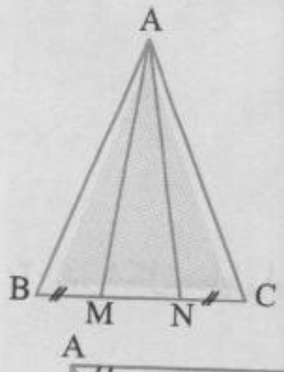
BIAMOZ.com

۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس است. نشان دهید که AD و BC برابرند. از آنجا که شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس مثلث‌های AOD و BOC قائم‌الزاویه‌اند.



$$\left.\begin{array}{ll} OA = OB & \text{(ضلع مشترک)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{(متقابل به رأس)} \\ \hat{A} = \hat{B} & \text{(هستند } 90^\circ\text{)} \end{array}\right\} \longrightarrow \overset{\Delta}{AOD} \cong \overset{\Delta}{BOC} \Rightarrow AD = BC$$

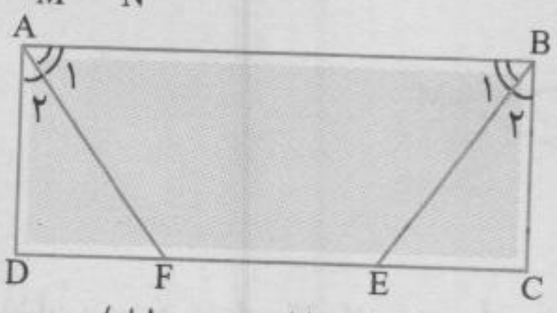
۳- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین است و M و N روی قاعدهٔ BC طوری قرار دارند که $BM = NC$.
نشان دهید مثلث AMN هم متساوی‌الساقین است.



$$\left.\begin{array}{ll} AB = AC & \text{(فرض)} \\ \hat{B} = \hat{C} & \text{(زاویه‌های مجاور قاعده در مثلث متساوی‌الساقین)} \\ BM = CN & \text{(فرض)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}}$$

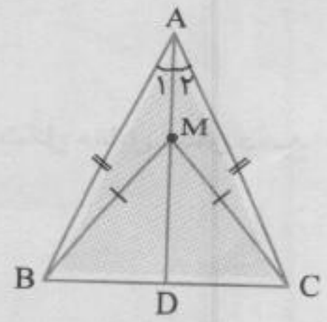
$\overset{\Delta}{AMB} \cong \overset{\Delta}{ANC} \Rightarrow AM = AN \Rightarrow$ AMN متساوی‌الساقین است.

۴- در مستطیل ABCD، پاره‌خط‌های BE و AF طوری رسم شده‌اند که دو زاویه $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ برابرند. ثابت کنید. BE و AF مساوی‌اند.



$$\left.\begin{array}{ll} AD = BC & \text{(ضلع مقابل در مستطیل)} \\ \hat{B}_2 = \hat{A}_2 & \text{(چون } \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \text{ و A و B قائمه‌اند)} \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ & \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \overset{\Delta}{ADF} \cong \overset{\Delta}{BCE} \Rightarrow AF = BE$$

۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین، فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه روی نیمساز زاویهٔ رأس، از دو سر قاعده، برابر است: $MB = MC$.

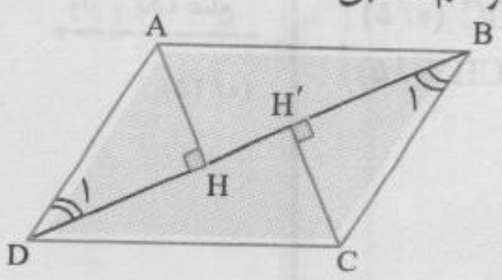


$$\left.\begin{array}{ll} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & \text{(A نیمساز AD)} \\ AM = AM & \text{(ضلع مشترک)} \\ AB = AC & \text{(فرض)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{AMB} \cong \overset{\Delta}{AMC} \Rightarrow MB = MC$$

چون M نقطه دلخواهی روی نیمساز زاویه رأس بود، پس این استدلال را می‌توان به همهٔ نقاط روی نیمساز زاویه رأس تعمیم داد.

نتیجه: در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه رأس و عمود منصف قاعده بر هم منطبق‌اند.

۶- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و AH و CH' فاصله‌های نقاط A و C از قطر BD است. دلیل برابری دو زاویهٔ $\hat{B}_1$ و $\hat{D}_1$ را توضیح دهید.



چون $AD \parallel BC$ و BD مورب است پس $\hat{D}_1 = \hat{B}_1$.

BIAMOZ.com

نشان دهید مثلث‌های ADH و BCH′ همنهشتند و از آنجا برابری AH و CH′ را نتیجه بگیرید. سپس جملهٔ زیر را کامل کنید:

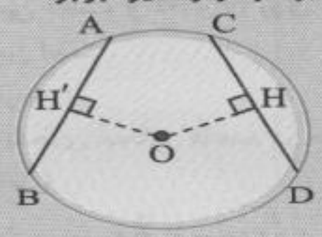
$$\left.\begin{matrix} AD = BC \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ H = H' = 90^\circ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(\text{و ز})} A\overset{\Delta}{D}H \cong B\overset{\Delta}{C}H' \Rightarrow AH = CH'$$

(اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع)
(BC ∥ AD و BD مورب)

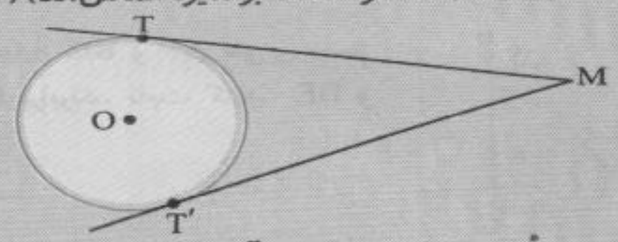
در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو رأس مقابل از قطر بین آنها، به یک فاصله‌اند.

ارزشیابی مستمر

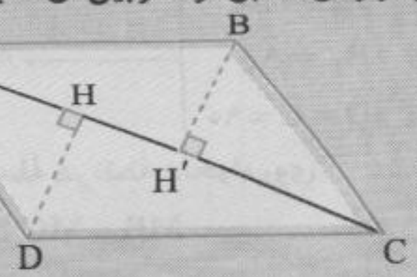
۱- ثابت کنید فاصله دو وتر مساوی در یک دایره از مرکز دایره برابر است. (۲ نمره)



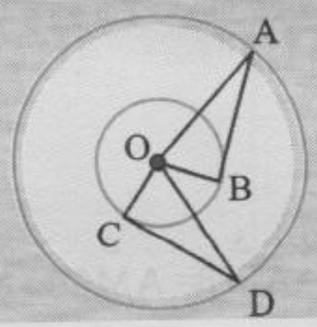
۲- در شکل مقابل نشان دهید $MT = MT'$. (MT و MT′ بر دایره مماس‌اند) (۲)



۳- نشان دهید در متوازی‌الاضلاع هر دو رأس مقابل از قطر بین آن‌ها به یک فاصله است. (۲)

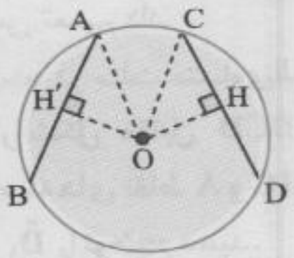


۴- در شکل مقابل نشان دهید $AB = CD$. (۲)



پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ می‌دانیم شعاع عمود بر یک وتر آن را نصف می‌کند. داریم:

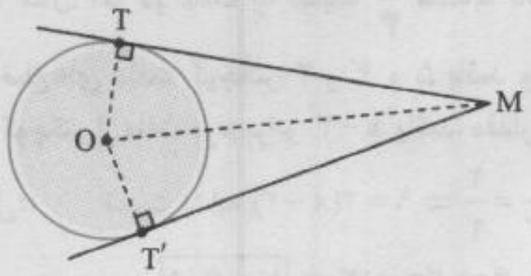


$$\left.\begin{matrix} OA = OC \ (۰/۵) & (\text{شعاع}) \\ AH' = CH \ (۰/۵) & (\text{فرض } CD = AB) \end{matrix}\right\} \xrightarrow[(۰/۲۵)]{\text{وتر و یک ضلع}}$$

$$AOH' \cong COH \Rightarrow OH = OH'$$
$$(۰/۲۵) \qquad (۰/۵)$$

BIAMOZ.com

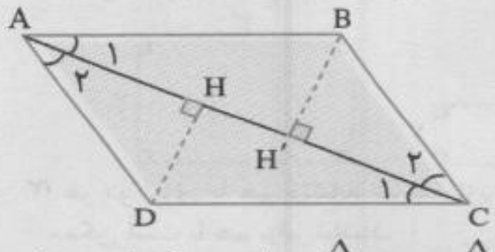
۲



(۰/۵) $OT = OT'$ (شعاع)
$OM = OM$ (مشترک) (۰/۵)
} وتر و یک ضلع →

$\overset{\Delta}{OTM} \cong \overset{\Delta}{OT'M} \Rightarrow MT = MT'$ (۰/۵)
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

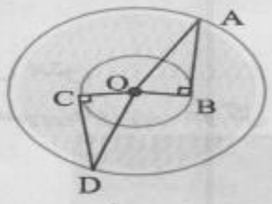
۳



$AB = DC$ (۰/۵) (فرض متوازی‌الاضلاع)
$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (۰/۵) ($AB \parallel DC$ و AC مورب)
} (وتر و یک زاویه تند) →

$\overset{\Delta}{ABH'} \cong \overset{\Delta}{CDH} \Rightarrow DH = BH'$ (۰/۵)
(۰/۵)

۴



$OA = OD$ (۰/۵) (شعاع)
$OB = OC$ (۰/۵) (شعاع)
} وتر و یک ضلع → (۰/۲۵)

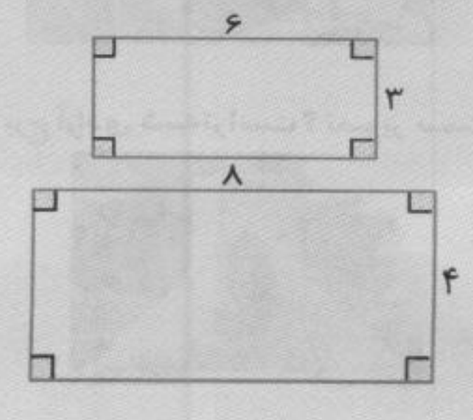
$\overset{\Delta}{ABO} \cong \overset{\Delta}{DCO} \Rightarrow CD = BA$ (۰/۵)
(۰/۲۵)

۵ درس شکل‌های متشابه

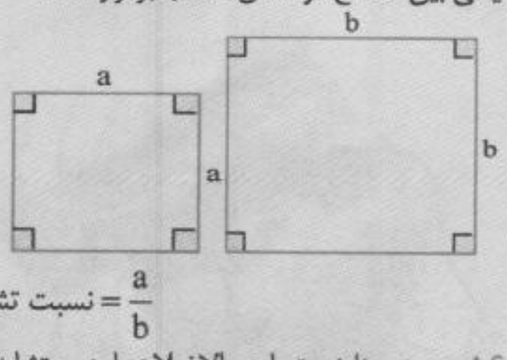
چکیده درس:

✪ نکته ۱۴: هرگاه دو شکل به گونه‌ای باشند که اندازهٔ زاویه‌های دو شکل با هم برابر باشند و با کوچکتر کردن یا بزرگتر کردن همه ضلع‌ها به‌یک نسبت در یکی از دو شکل، شکل دیگر به‌دست آید، می‌گوییم آن دو شکل با هم متشابه هستند. به نسبتی که همه ضلع‌ها به آن نسبت بزرگ یا کوچک شده‌اند، نسبت تشابه می‌گویند.

مثال: در شکل‌های مقابل دو مستطیل به نسبت تشابه $\frac{۳}{۴}$ متشابه‌اند.

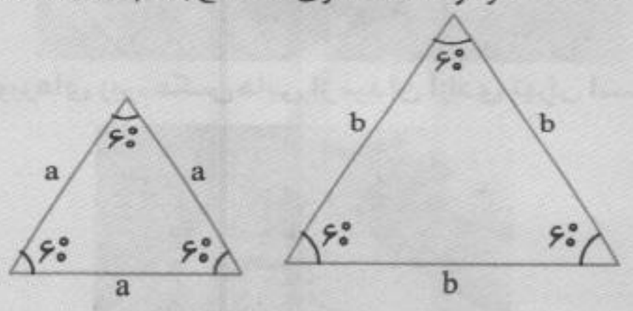


✪ نکته ۱۵: هر دو مربعی با هم متشابه‌اند. زیرا اولاً زاویه‌های آنها با هم برابر است و ثانیاً همهٔ ضلع‌ها به یک نسبت کوچک یا بزرگ شده‌اند. یعنی بین اضلاع دو شکل تناسب برقرار است.



→ نسبت تشابه $= \frac{a}{b}$

✪ نکته ۱۶: هر دو مثلث متساوی الاضلاع با هم متشابه هستند.



→ نسبت تشابه $= \frac{a}{b}$

BIAMOZ.com

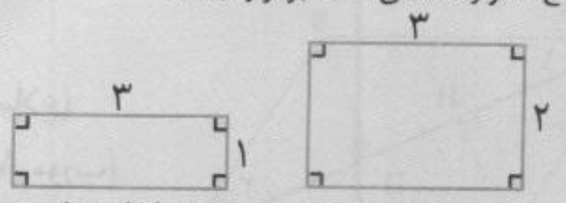
مثال: اگر دو مثلث به نسبت $\frac{۲}{۳}$ متشابه باشند و اندازه ضلع‌های مثلث کوچکتر ۳ و ۴ و ۵ باشد و اندازه ضلع کوچکتر از مثلث دوم برابر $x-۲$ باشد، مقدار x را بیابید:

حل: نسبت تشابه $\frac{۲}{۳} = \frac{۳}{x-۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۹ = ۲(x-۲)$

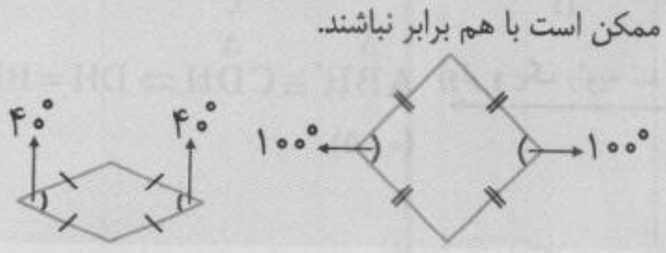
$\Rightarrow ۹ = ۲x-۴ \Rightarrow ۲x = ۱۳ \Rightarrow \boxed{x = ۶/۵}$

نکته ۱۷: توجه کنید که:

۱) هر دو مستطیل با هم متشابه نیستند، زیرا تناسب بین اضلاع همواره ممکن است برقرار نباشد.

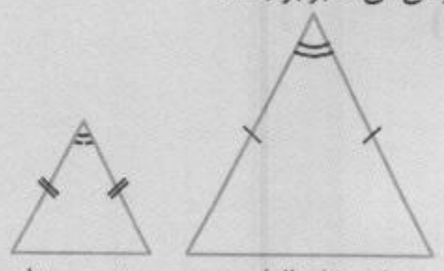


۲) هر دو لوزی با هم متشابه نیستند، زیرا زاویه‌های دو لوزی ممکن است با هم برابر نباشند.

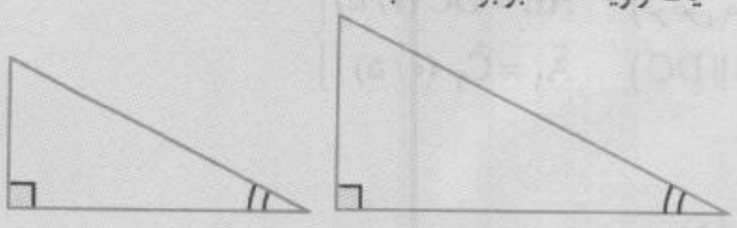


۳) هر دو مثلث متساوی‌الساقین با هم متشابه نیستند، زیرا هم ممکن است زاویه‌های دو مثلث برابر نباشند و یا اینکه اضلاع متناسب نباشند.

نکته ۱۸: دو مثلث متساوی الساقین در صورتی متشابه هستند که زاویه راس آن‌ها برابر باشد.



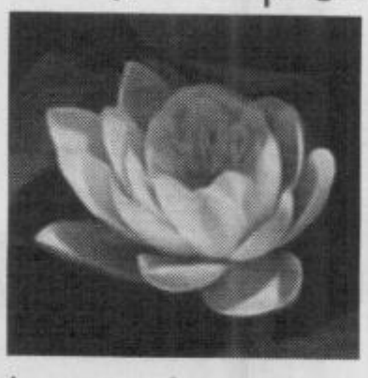
نکته ۱۹: دو مثلث قائم‌الزاویه در صورتی متشابه هستند که یک زاویه حاده برابر داشته باشند.



سوال متن

- در تصویرهای زیر، دو گل شبیه به هم را می‌بینید. آیا هر دو گل به‌طور کامل مثل هم است؟ خیر



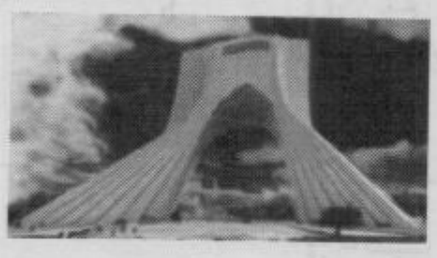


- در تصویرهای زیر دو عکس از یک کودک را می‌بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟ دو تصویر شبیه هم هستند ولی یکی با ابعاد کوچک‌تر و دیگری با ابعاد بزرگ‌تر





- تصویرهای زیر، عکس‌هایی از میدان آزادی تهران است. کدام یک به برج آزادی شبیه‌تر است؟ تصویر سمت چپ.

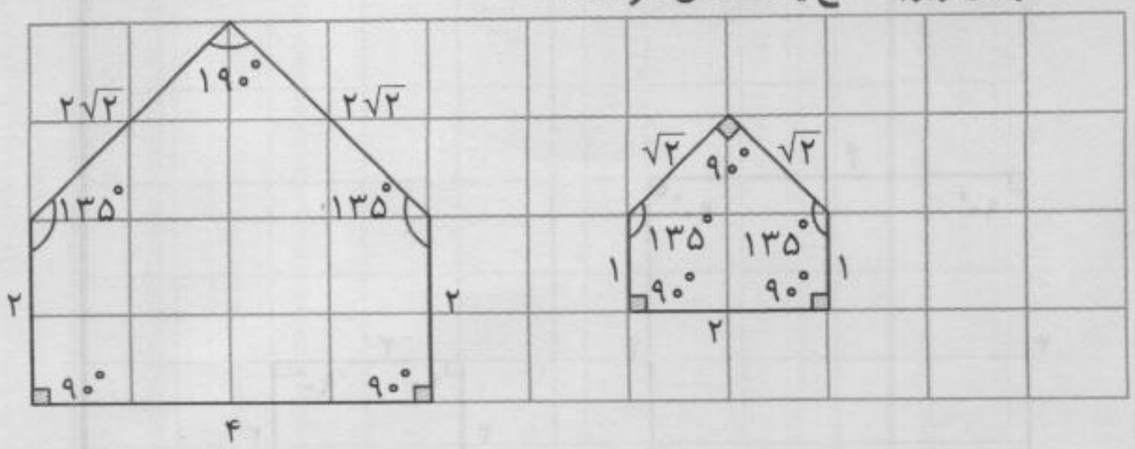




BIAMOZ.com

فعالیت ۵۴

۱- مربع‌های صفحهٔ شطرنجی زیر به ضلع یک سانتی‌متر است:



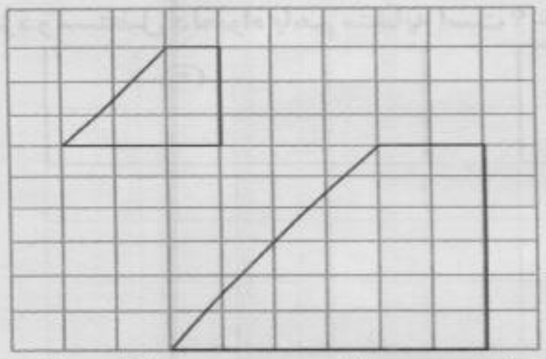
اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید:

چه رابطه‌ای بین ضلع‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟ ضلع‌های دو شکل به یک نسبت تغییر کرده‌اند. در واقع اضلاع شکل بزرگتر همگی دو برابر اضلاع شکل کوچکتر است.

چه رابطه‌ای بین زاویه‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟ زاویه‌های متناظر دو شکل با هم برابرند.

اندازه ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع‌های شکل (۲) است؟ ۲ برابر

در صفحه شطرنجی مقابل یک چندضلعی رسم کنید و چندضلعی دیگری مانند آن بکشید به‌طوری که اندازهٔ ضلع‌هایش ۲ برابر شکل اوّل باشد.



۲- در تصویر زیر، نقشه قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰۰۰۰ است؛ یعنی هریک سانتی‌متر روی نقشه با ۱۰۰،۰۰۰ سانتی‌متر مقدار واقعی برابر است. فاصله دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید.

میدان‌انقلاب — میدان‌آزادی

۷ cm

چون فاصلهٔ دو میدان روی نقشه تقریباً برابر با ۷ سانتی‌متر است پس طبق مقیاس داریم:

$$\frac{\text{نقشه}}{\text{واقعیت}} \quad \frac{۱}{۱۰۰۰۰۰} = \frac{۷}{x} \Rightarrow x = ۷۰۰۰۰۰cm = ۷۰۰۰m = ۷km$$

۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده‌ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید. با توجه به اینکه عدد روی دستگاه ۵۰٪ است پس طول هر ضلع را نصف می‌کنیم.

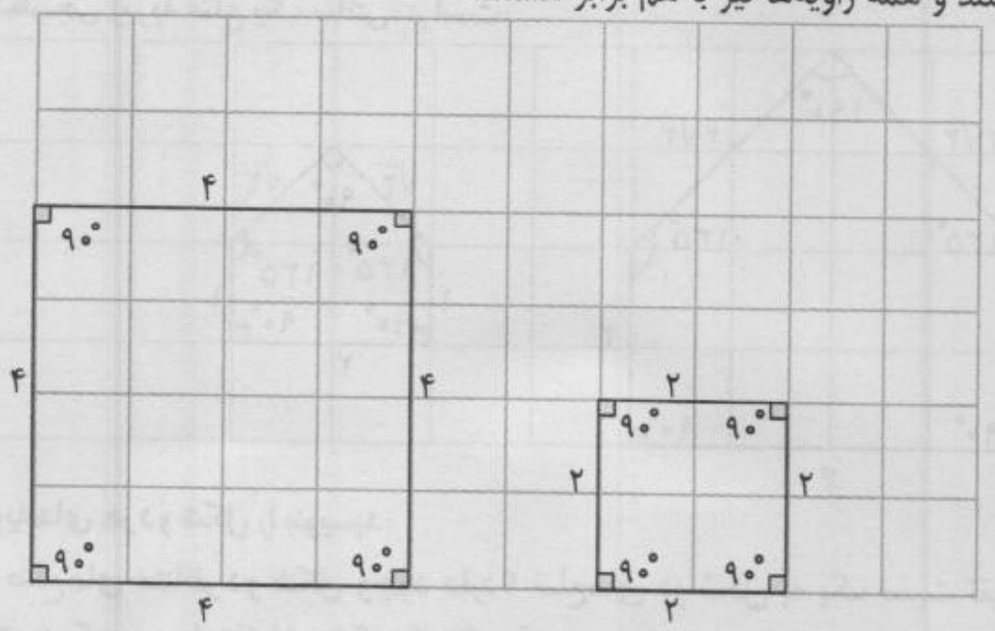


کار در کلاس ۵۵

۱- آیا دو مربع زیر متشابه است؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هرکدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ بله – زاویه‌های دو شکل با هم برابرند و ضلع به نسبت $\frac{۱}{۲}$ تغییر کرده‌اند.

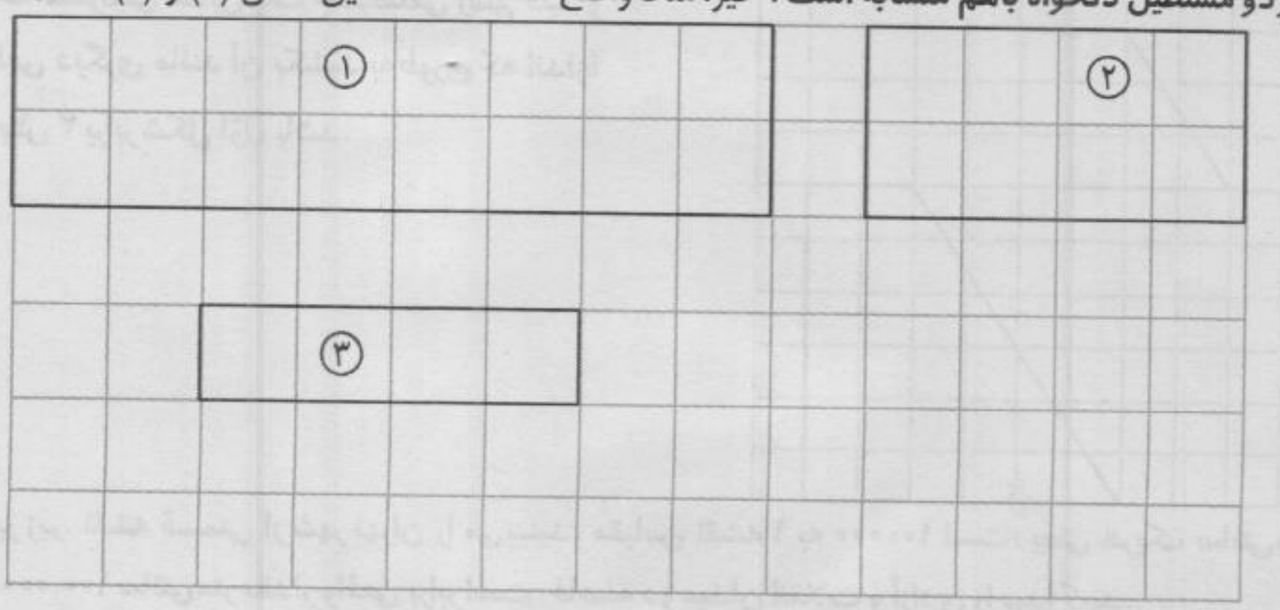
BIAMOZ.com

آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه باهم متشابهند؟ چرا؟ بله – می‌توان گفت. زیرا در هر دو مربع ضلع‌ها به یک نسبت تغییر می‌کنند و همهٔ زاویه‌ها نیز با هم برابر هستند.



۲- از مستطیل‌های زیر کدام باهم متشابهند؟ چرا؟ مستطیل‌های شکل (۱) و شکل (۳) – چون زاویه‌های آنها با هم برابرند و همه‌ی اضلاع آنها به نسبت $\frac{۱}{۲}$ تغییر کرده‌اند.

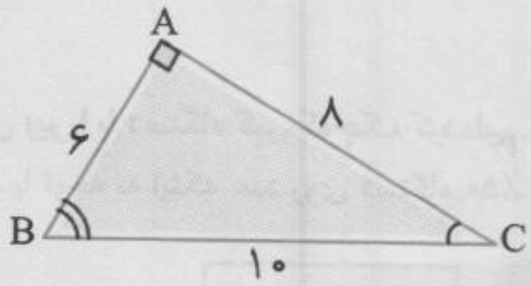
آیا هر دو مستطیل دلخواه باهم متشابه است؟ خیر. مثلاً واضح است که مستطیل شکل (۱) و (۲) متشابه نیستند.

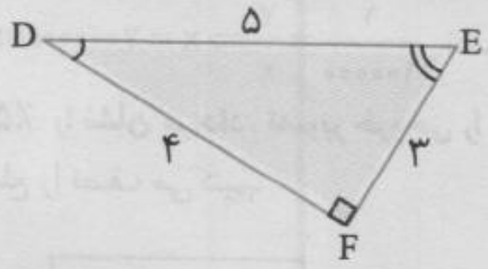


۵۶

فعالیت

دو مثلث زیر باهم متشابه است. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را همرنگ کنید. نسبت ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به‌دست آمد؟





زاویه‌های متناظر: $\hat{C}=\hat{D}$, $\hat{B}=\hat{E}$, $\hat{A}=\hat{F}$

ضلع‌های متناظر: (EF,AB) و (AC,DF) و (BC,DE)

نسبت ضلع‌ها: $\frac{AB}{EF}=\frac{۶}{۳}=\frac{۲}{۱}$ ، $\frac{AC}{DE}=\frac{۸}{۴}=\frac{۲}{۱}$ ، $\frac{BC}{DE}=\frac{۱۰}{۵}=\frac{۲}{۱}$

بله – سه کسر برابر هستند.

BIAMOZ.com

کار در کلاس ۵۶

۱- باتوجه به مربع صفحهٔ بعد، مربع دیگری رسم کنید به گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع $\frac{۱}{۲}$ باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟

دو مربع می‌توان رسم کرد که به نسبت $\frac{۱}{۲}$ با مربع داده شده متشابه باشند، زیرا مربع رسم شده می‌تواند کوچکتر یا بزرگتر باشد.



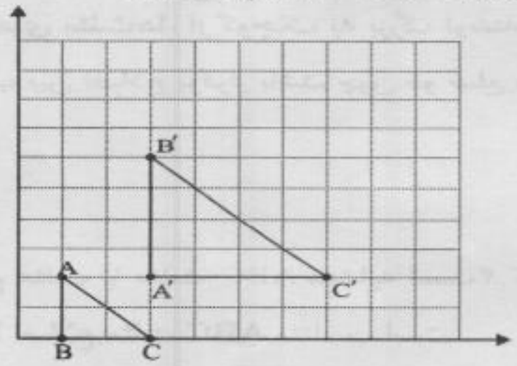
۲- در صفحهٔ مختصات نقاط زیر را پیدا کنید.

مثلث ABC $C=\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ مثلث $A'B'C'$ $C'=\begin{bmatrix}۷\\۲\end{bmatrix}$ $B'=\begin{bmatrix}۳\\۶\end{bmatrix}$ $A'=\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$ طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

$AB=BC=۲$, $AC=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$

$A'B'=۴$, $A'C'=۴$ $B'C'=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$

دو شکل متشابه هستند و نسبت تشابه آنها $\frac{۱}{۲}$ است.



تمرین ۵۷

۱- چندضلعی‌های متشابهی که در شکل زیر تشخیص می‌دهید، نام ببرید.



الف) $\overset{\Delta}{AFH}$, $\overset{\Delta}{AHC}$, $\overset{\Delta}{CHJ}$, $\overset{\Delta}{FHO}$, $\overset{\Delta}{HOP}$, $\overset{\Delta}{HPJ}$, $\overset{\Delta}{KBN}$, $\overset{\Delta}{DGH}$ متشابهند

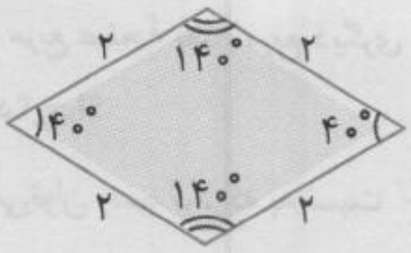
ب) $DHEB$, $GKLH$, $MNIH$ متشابهند

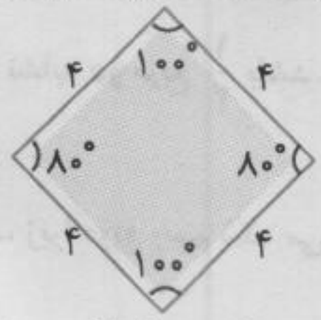
ج) $AFOH$, $CHPS$ متشابهند

۲- آیا هر دو شکل همنهشت باهم، متشابه نیز هستند؟ در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ بله – چون زاویه‌های متناظر در آنها با هم برابر است و نیز نسبت تشابه $\frac{۱}{۱}=۱$ است.

BIAMOZ.com

۳- آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟ خیر. زیرا زاویه‌های آنها همواره با هم برابر نیستند.



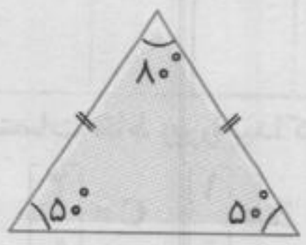


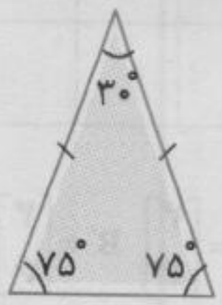
۴- در یک نقشه، مقیاس ۱:۲۰۰ است. فاصلهٔ دو نقطه روی نقشه ۳/۵ سانتی‌متر است. فاصله این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟

$$\frac{\text{نقشه}}{\text{واقعیت}}\quad \frac{۱}{۲۰۰}=\frac{۳/۵}{x}\Rightarrow x=۲۰۰\times ۳/۵=۷۰۰\text{cr}$$

۵- آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟ بله - چون همه زاویه‌های متناظر در آنها با هم برابر است (۶۰°) و نسبت بین اضلاع متناظر ثابت است.

۶- آیا هر دو مثلث متسای الساقین متشابهند؟ چرا؟ خیر - زیرا زاویه‌های هر دو مثلث متساوی‌الساقین با هم برابر نیستند.



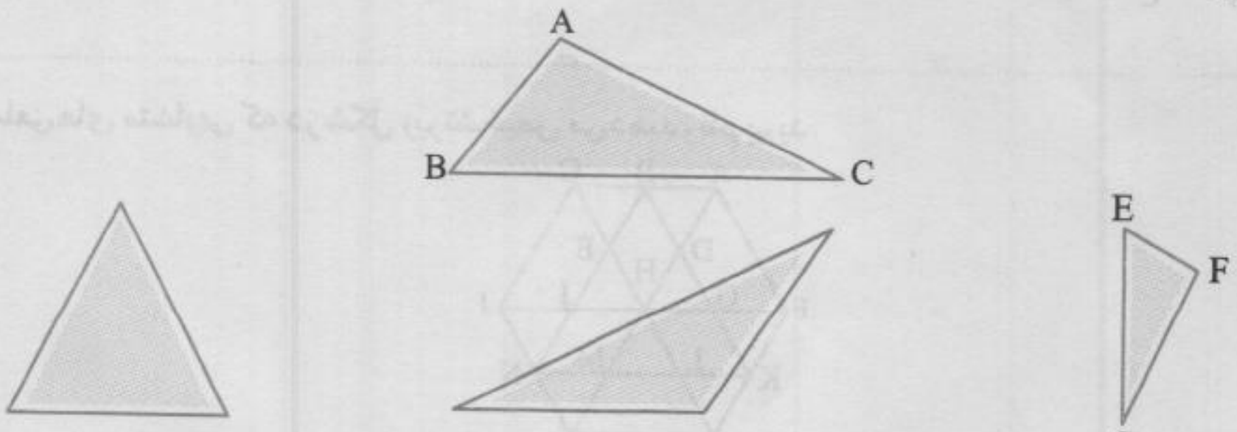


۷- مثلث ABC به ضلع‌های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع $x-۱$ و ۱۰ و $x+۷$ باهم متشابه هستند (اندازه ضلع‌های مثلث‌ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است). مقدار x را پیدا کنید. چون دو مثلث مشابهند، پس باید تناسب بین اضلاع برقرار باشد. چون دو ضلع ۵ و ۱۰ معلوم هستند پس نسبت $\frac{۵}{۱۰}$ یا $\frac{۱}{۲}$ است.

$$\frac{۴}{x-۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲\times ۴=x-۱\Rightarrow ۸=x-۱\Rightarrow \boxed{x=۹}$$

(×۴ روی ۴ و ۱، ×۴ زیر $x-۱$ و ۲)

۸- کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟ کوچکترین مثلث، یعنی مثلث EFG. زیرا اضلاع آن همگی به نسبت $\frac{۱}{۲}$ با اضلاع مثلث ABC متناسب است.



ارزشیابی مستمر

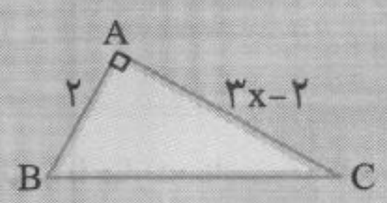
۱- آیا هر دو مربع متشابهند؟ چرا؟ (۱ نمره)

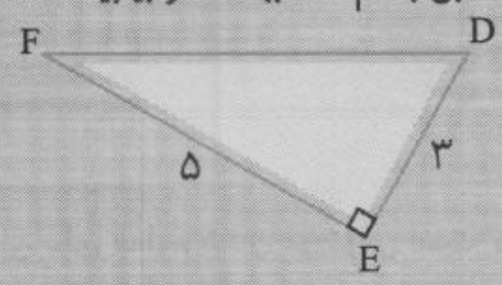
۲- آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟ (۱)

۳- در دو شکل متشابه نسبت تشابه برابر با $\frac{۳}{۴}$ است. اگر طول ضلع کوچکتر شکل اول برابر ۹ باشد، ضلع کوچکتر شکل دوم چه اندازه‌ای است؟ (۱)

BIAMOZ.com

۴- دو شکل مقابل با هم متشابهند. x را بیابید. (۲)

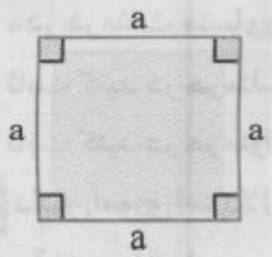




۵- نشان دهید در دو مستطیل متشابه، نسبت محیط‌های دو مستطیل با نسبت تشابه برابر است. (۲)

پاسخ ارزشیابی مستمر

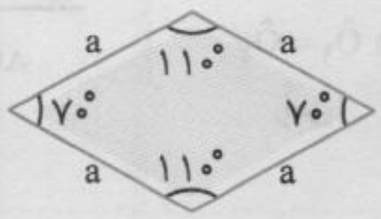
۱ بله (۰/۲۵) – زیرا اولاً همه زاویه‌های دو شکل با هم برابرند و ثانیاً نسبت بین همهٔ اضلاع با هم برابر است. (۰/۲۵)

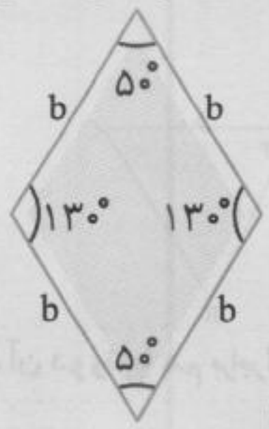




نسبت تشابه $= \frac{a}{b}$ (۰/۵)

۲ خیر (۰/۲۵) – زیرا زاویه‌های دوشکل ممکن است برابر نباشند. (۰/۲۵)





(۰/۵)

۳

$\frac{۳}{۴} = \frac{۹}{x} \Rightarrow x = \frac{۴\times۹}{۳} = ۱۲$ (۰/۵) (۰/۵)

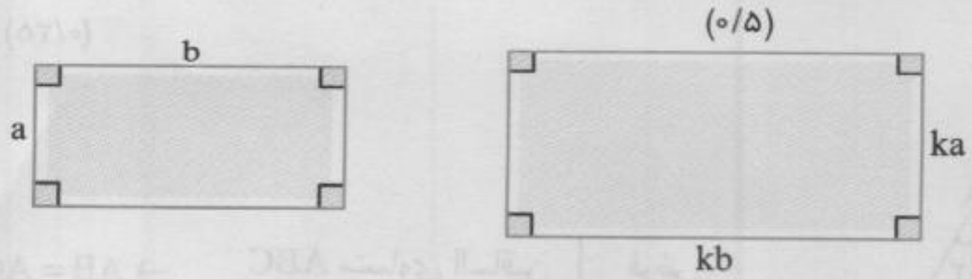
۴

$\frac{۲}{۳} = \frac{۳x-۲}{۵} \Rightarrow ۱۰ = ۳(۳x-۲) \Rightarrow ۱۰ = ۹x-۶ \Rightarrow ۹x = ۱۶ \Rightarrow x = \frac{۱۶}{۹}$

(۰/۵) (۰/۵) (۰/۵) (۰/۵)

۵ اگر دو مستطیل مشابه باشند و نسبت تشابه برابر $\frac{۱}{k}$ باشد داریم:

(۰/۵)



نسبت تشابه $= \frac{۲(a+b)}{۲(ka+kb)} = \frac{a+b}{k(a+b)} = \frac{۱}{k} =$ $\frac{\text{محیط مستطیل کوچک‌تر}}{\text{محیط مستطیل بزرگ‌تر}}$ (۰/۵)

(۰/۵) (۰/۵)

BIAMOZ.com

آزمون تلفیقی

مبحث: فصل سوم　　مدت: .....　　تاریخ: ...../...../.....

۱- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۱ نمره)

الف) ..... دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی برای معلوم شدن موضوعی است که قبلاً مجهول بوده است.

ب) داده‌های یک مسئله هندسی را ..... می‌گوییم و آنچه مسئله از ما خواسته ..... می‌نامیم.

ج) اگر دو شکل متشابه باشد نسبت اندازه‌های دو ضلع متناظر را ..... می‌گوییم.

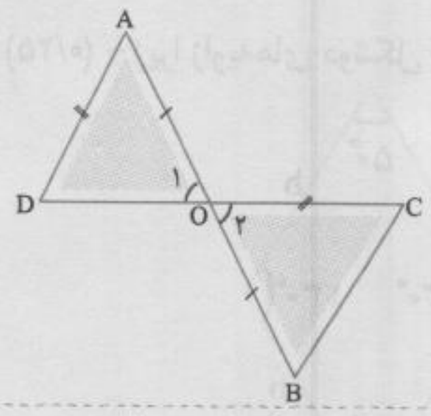
۲- در مسئله زیر فرض و حکم را مشخص کنید. (۱)

«در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده نیم‌ساز زاویه رأس است»

۳- ثابت کنید در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن. (۲)

۴- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع ضلع‌های مقابل برابرند. (۲)

۵- دانش‌آموزی استدلال کرده است که دو مثلث AOD و BOC بنابر حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند. آیا استدلال او درست است؟ چرا؟ (۰/۵)



$AO = OB$ (فرضی)

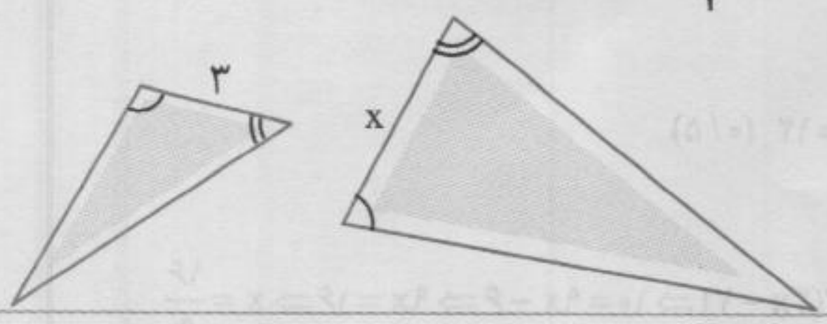
$AD = OC$ (فرضی)

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (متقابل به رأس)

$\xrightarrow{(ض\ ز\ ض)}$ $AOD \cong BOC$

۶- ثابت کنید اگر دو وتر از مرکز یک دایره به یک فاصله باشند، طول آن دو وتر با هم برابر است. (۲)

۷- دو مثلث مقابل به نسبت $\frac{۲}{۳}$ متشابه‌اند. مقدار x را بیابید. (۱)



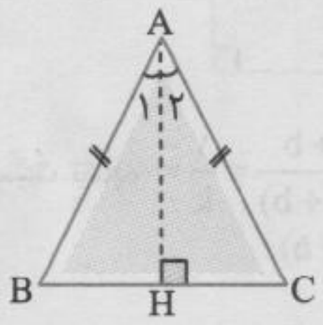
پاسخ آزمون تلفیقی فصل سوم

۱ الف) استدلال (۰/۲۵)

ب) فرض (۰/۲۵) ـ حکم (۰/۲۵)

ج) نسبت تشابه (۰/۲۵)

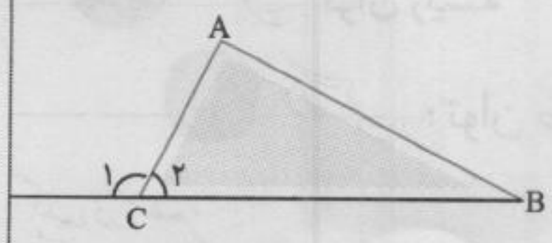
۲



فرض	ABC متساوی الساقین	$\rightarrow AB = AC$
حکم	AH نیم‌ساز A است	$\rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

BIAMOZ.com

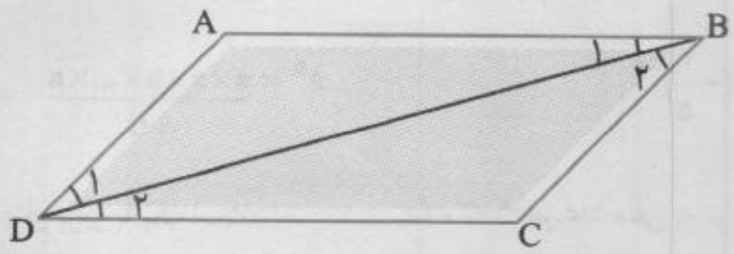
۳ مثلث ABC و زاویه خارجی C را رسم می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_2=180^\circ \quad (0/5)\\ \hat{C}_2+\hat{C}_1=180^\circ \quad (0/5)\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\cancel{\hat{C}_2}=\cancel{\hat{C}_2}+\hat{C}_1 \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\cancel{\hat{C}_1}$$
$$(0/5)$$

۴

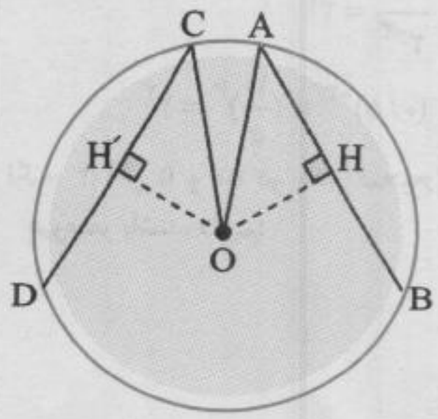


$$\left.\begin{array}{ll}DB=DB \ (0/25) & \text{(مشترک)}\\ \hat{D}_1=\hat{B}_2 \ (0/25) & \text{(} AD\parallel BC \text{ و } BD \text{ مورب)}\\ \hat{D}_2=\hat{B}_1 \ (0/25) & \text{(} AB\parallel DC \text{ و } BD \text{ مورب)}\end{array}\right\}\xrightarrow[(0/25)]{\text{ز ض ز}}$$

$$\underset{(0/5)}{\overset{\Delta}{ADB}}\equiv\overset{\Delta}{CDB}\Rightarrow\begin{cases}AD=BC \ (0/25)\\ AB=DC \ (0/25)\end{cases}$$

۵ استدلال او نادرست است (۰/۲۵). زیرا زاویه‌های $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ بین دو ضلع برابر قرار ندارند تا حالت (ض ز ض) ایجاد شود. (۰/۲۵)

۶ از O به دو وتر عمودهای OH و OH' را وصل می‌کنیم. می‌دانیم این عمودها وترها را نصف می‌کنند (۰/۲۵). بار دیگر از O به A و C وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{ll}OC=OA \ (0/25) & \text{(شعاع)}\\ H'O=HO \ (0/25) & \text{(فرض)}\end{array}\right\}\xrightarrow[(0/25)]{\text{وتر و یک ضلع}}$$

$$\underset{(0/25)}{\overset{\Delta}{H'OC}}\equiv\underset{(0/25)}{\overset{\Delta}{HOA}}\Rightarrow \underset{(0/25)}{H'C=HA}\rightarrow \underset{(0/25)}{2H'C=2HA}$$

$$\Rightarrow DC=AB \ (0/25)$$

۷

$$\underset{(0/5)}{\frac{2}{3}}=\underset{(0/5)}{\frac{3}{x}}\Rightarrow x=\underset{(0/5)}{\frac{9}{2}}=4/5$$

BIAMOZ.com

فصل ۴ توان ریشه

درس ۱: توان صحیح

چکیده درس:

نکته ۱: هر عدد به توان n (n عددی طبیعی) یعنی آن عدد n بار در خودش ضرب شود.

$$a^n = \underbrace{a\times a\times a\times ...\times a}_{n\text{ بار}}$$

نکته ۲: هر عدد غیرصفر به توان صفر برابر با یک است.

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

✪ نکته ۳: اگر پایه یک عدد توان‌دار را معکوس کنیم، توان آن قرینه می‌شود. (توجه کنید که عدد صفر معکوس ندارد.) با توجه به این نکته توان منفی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = (\frac{1}{a})^n$$

مثال: اعداد زیر را با توان منفی بنویسید.

$$2^3 = (\frac{1}{2})^{-3}, (\frac{2}{3})^2 = (\frac{3}{2})^{-2}, 3 = (\frac{1}{3})^{-1}, \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$(0/25)^4 = (\frac{100}{25})^{-4} = 4^{-4}$$

$$(0/008)^5 = (\frac{1000}{8})^{-5} = (125)^{-5}$$

مثال: اعداد زیر را با توان مثبت بنویسید.

$$3^{-5} = (\frac{1}{3})^5 \qquad \frac{1}{2^{-3}} = 2^3$$

$$(\frac{3}{5})^{-2} = (\frac{5}{3})^2 \qquad (0/5)^{-3} = (\frac{10}{5})^3 = 2^3$$

نکته ۴: اگر n و m دو عدد صحیح a و b دو عدد حقیقی غیرصفر باشند، داریم:

۱) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

۲) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

۳) $a^n \times b^n = (ab)^n$

۴) $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

۵) $(a^n)^m = a^{nm}$

✪ **مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.**

$3^{-5} \times 3^2 = 3^{-5+2} = 3^{-3}$

$(\frac{4}{5})^{-3} \times (\frac{5}{2})^{-3} = (\frac{4}{5} \times \frac{5}{2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

$\frac{3^{-7} \times 2^{-4}}{3^{-3}} = \frac{3^{-7}}{3^{-3}} \times 2^{-4} = 3^{-4} \times 2^{-4} = 6^{-4}$

$(-3)^{-2} \div 5^{-2} = (-3 \div 5)^{-2} = (-\frac{3}{5})^{-2}$

$(3^{-2})^{-4} = 3^8$

✪ نکته ۵: هر عدد منفی به توان زوج برسد، حاصل عددی مثبت و هر عدد منفی به توان فرد برسد، حاصل عددی منفی می‌شود.

مثال: $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$ $\qquad (-2)^{-4} = \frac{1}{16}$.

$(-3)^{-11} = -3^{11} \qquad (-3)^{-6} = 3^{-6}$

مثال: مقدار عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$(-0/2)^{-4} \times (-25)^{-2} = (0/2)^{-4} \times 25^{-2}$

$= (0/2)^{-4} \times (5^2)^{-2} = (0/2)^{-4} \times 5^{-4} = 1^{-4} = 1$

$[-(\frac{2}{3})^{-2}]^{-1} = -((\frac{2}{3})^{-2})^{-1} = -(\frac{2}{3})^2 = -\frac{4}{9}$

✪ نکته ۶: اعداد بین صفر و یک هرچه به توان بیشتری برسند، حاصل عددی کوچک‌تر و هرچه به توان کمتری برسند، حاصل عددی بزرگ‌تر می‌شود.

$0 < a < 1 \rightarrow 0 \leq a^n < a < 1$

✪ نکته ۷: اعداد بزرگ‌تر از یک هرچه به توان بیشتری برسند، حاصل عددی بزرگ‌تر و هرچه به توان کمتری برسند. حاصل عددی کوچک‌تر می‌شود.

$a > 1 \rightarrow a^n \geq a > 1$

مثال: اعداد را از چپ به راست و از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$(-3)^{-2}, (-3)^{-3}, (\frac{-2}{3})^2, (\frac{-2}{5})^0, (-1)^{-5}, 2^3$

$(-3)^{-2} = \frac{1}{9}$, $(-3)^{-3} = \frac{-1}{27}$, $(\frac{-2}{3})^2 = \frac{4}{9}$

$(\frac{-2}{5})^0 = 1$, $(-1)^{-5} = -1$, $2^3 = 8$

$-1 < \frac{-1}{27} < \frac{1}{9} < \frac{4}{9} < 1 < 8 \Rightarrow$

$(-1)^{-5} < (-3)^{-3} < (-3)^{-2} < (\frac{-2}{3})^2 < (\frac{-2}{5})^0 < 2^3$

فعالیت ۶۰

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	۸	۱۶
2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4

BIAMOZ.com

الف) عددهای سطر اوّل جدول با هم چه ارتباطی دارند؟ از چپ به راست هر عدد نصف می‌شود تا عدد بعدی به‌دست آید.

ب) هریک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟ عددهای پایینی صورت توان‌دار عددهای بالایی هستند.

ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا 2^{0} با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟ توان‌ها یک واحد، یک واحد کم می‌شوند.

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.

هـ) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$2^{-3}=\frac{1}{2^{3}}$ $2^{-4}=\frac{1}{2^{4}}$ $2^{-5}=\frac{1}{2^{5}}$

۶۱

کار در کلاس

۱- با توجه به مثال‌های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به‌صورت یک عدد توان‌دار با توان طبیعی بنویسید:

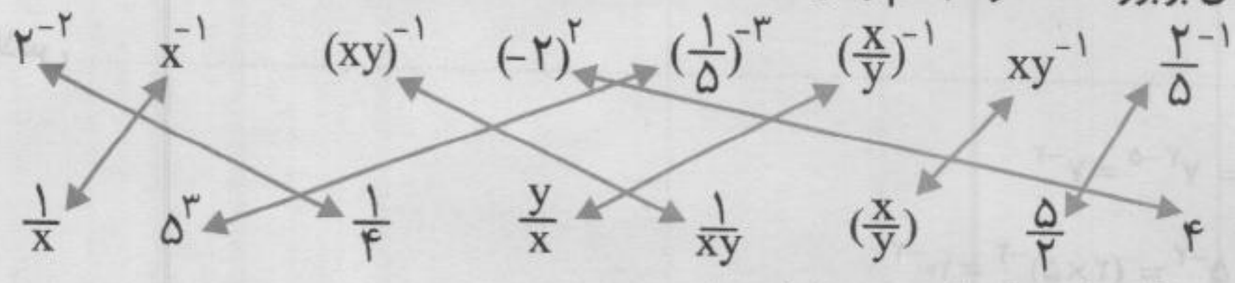
الف) $5^{-2}=\frac{1}{5^{2}}=\frac{1}{25}=(\frac{1}{5})^{2}$

ب) $(\frac{2}{3})^{-2}=\frac{1}{(\frac{2}{3})^{2}}=\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}=(\frac{3}{2})^{2}$

ج) $(-6)^{-3}=\frac{1}{(-6)^{3}}=\frac{1}{-216}=(-\frac{1}{6})^{3}$

د) $(\frac{-2}{7})^{-4}=\frac{1}{(\frac{-2}{7})^{4}}=\frac{1}{\frac{16}{2401}}=\frac{2401}{16}=(\frac{7}{2})^{4}$

۲- عبارت‌های برابر را مانند نمونه به‌هم وصل کنید: $(x\neq 0, y\neq 0)$



۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

الف) $(-\frac{1}{3})^{-4}=(-3)^{4}=3^{4}=81$

ب) $2^{-1}+3^{-1}+4^{-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}$

ج) $-(-5)^{2}=-25$

د) $-(-5)^{-2}=-(-\frac{1}{5})^{2}=-\frac{1}{25}$

هـ) $-5^{-2}=-\frac{1}{5^{2}}=-\frac{1}{25}$

و) $1^{-2}=1^{2}=1$

ز) $\frac{(-3)^{0}}{3}=\frac{1}{3}$

ح) $-\frac{1}{2^{-2}}=-\frac{1}{(\frac{1}{2})^{2}}=-\frac{1}{\frac{1}{4}}=-4$

ط) $(\frac{2}{5})^{-2}+(\frac{5}{2})^{2}=(\frac{5}{2})^{2}+(\frac{5}{2})^{2}=\frac{25}{4}+\frac{25}{4}=\frac{50}{4}=\frac{25}{2}$

ی) $3^{0}-2^{-1}=1-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$

۶۲

سؤال متن

آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟ بله، برای توان‌های منفی هم می‌توان از همین رابطه استفاده کرد.

$a^{m}\times a^{-n}=a^{m+(-n)}=a^{m-n}$

۶۲

فعالیت

به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$3^{-4}\times 3^{6}=\frac{1}{3^{4}}\times 3^{6}=\frac{3^{6}}{3^{4}}=3^{6-4}=3^{2}$

BIAMOZ.com

$$۲^{-۵}\times۲^{-۲}=\frac{۱}{۲^{۵}}\times\frac{۱}{۲^{۲}}=\frac{۱}{۲^{۵+۲}}=\frac{۱}{۲^{۷}}=۲^{-۷}$$

$$(-\frac{۱}{۲})^{-۳}\times(-\frac{۱}{۲})^{-۵}=(-۲)^{۳}\times(-۲)^{۵}=(-۲)^{۸}=(-\frac{۱}{۲})^{-۸}$$

برای محاسبه هر یک از ضرب‌های زیر ابتدا آن‌ها را به اعداد توان‌دار با توان طبیعی تبدیل کرده‌ایم و سپس از قواعد ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی استفاده کرده‌ایم. توان عددی که در پاسخ نوشته شده است از جمع توان‌های دو عدد توان‌دار ضرب شده به‌دست می‌آید.

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به‌دست آورید:

$$۵^{۳}\times۵^{-۷}=۵^{۳}\times\frac{۱}{۵^{۷}}=\frac{۵^{۳}}{۵^{۷}}=\frac{۱}{۵^{۴}}=۵^{-۴}$$

کار در کلاس

۶۲

حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید: $(b,x,y\neq ۰)$

$$(-۴)^{-۹}\times(-۴)^{-۱}=(-۴)^{-۹+(-۱)}=(-۴)^{-۱۰}$$

$$۵^{-۷}\times۵^{۱۰}=۵^{-۷+۱۰}=۵^{۳}$$

$$(\sqrt{۲})^{۴}\times(\sqrt{۲})^{-۲}=(\sqrt{۲})^{۴+(-۲)}=(\sqrt{۲})^{۲}=۲$$

$$(\frac{-۳}{۸})^{۴}\times(\frac{-۳}{۸})^{-۹}=(-\frac{۳}{۸})^{۴+(-۹)}=(\frac{-۳}{۸})^{-۵}$$

$$(\frac{x}{y})^{-۷}\times(\frac{x}{y})^{۱۱}=(\frac{x}{y})^{-۷+۱۱}=(\frac{x}{y})^{۴}$$

$$b^{-۲}\times b^{-۳}=b^{(-۲)+(-۳)}=b^{-۵}$$

کار در کلاس

۶۳

الف) $\frac{۷^{۳}}{۷^{۵}}=۷^{۳-۵}=۷^{-۲}$

ب) $۲^{-۲}\times۵^{-۲}=(۲\times۵)^{-۲}=۱۰^{-۲}$

ج) $(\frac{-۲}{۳})^{-۳}\times۱۲^{-۳}=(-\frac{۲}{۳}\times۱۲)^{-۳}=(-۸)^{-۳}=-۸^{-۳}$

د) $\left[(-\frac{۲}{۵})^{-۲}\right]^{-۱}=(-\frac{۲}{۵})^{(-۲)\times(-۱)}=(\frac{-۲}{۵})^{۲}=(\frac{۲}{۵})^{۲}$

هـ) $\frac{۲^{۸}\times۵^{۱۰}}{۲^{۴}\times۵^{۶}}=\frac{۲^{۸}}{۲^{۴}}\times\frac{۵^{۱۰}}{۵^{۶}}=۲^{۴}\times۵^{۴}=۱۰^{۴}$

و) $\frac{x^{۵}.y^{۲}.z}{x^{-۲}.y^{۷}.z^{۳}}=x^{۵-(-۲)}.y^{۲-۷}.z^{۱-۳}=x^{۷}y^{-۵}z^{-۲}$ $\quad x,y,z\neq ۰$

تمرین

۶۳

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $۳^{-۲}$ ⟨ $\boxed{\frac{۱}{۹}}$ ، -۶ $\quad ۳^{-۲}=\frac{۱}{۳^{۲}}=\frac{۱}{۹}$

ب) $۳^{-۱}$ ⟨ $\boxed{\frac{۱}{۳}}$ ، $-\frac{۱}{۳}$ $\quad ۳^{-۱}=\frac{۱}{۳^{۱}}=\frac{۱}{۳}$

ج) $۳^{-۱}\times۴^{-۱}$ ⟨ $\boxed{۱۲^{-۱}}$ ، $۷^{-۱}$ $\quad ۳^{-۱}\times۴^{-۱}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۲}=۱۲^{-۱}$

BIAMOZ.com

د) $۳^{-۱}+۴^{-۱}$ ← $\boxed{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}}$ ← $۷^{-۱}$

$$۳^{-۱}+۴^{-۱}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۴+۳}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

هـ) $۵^{-۲}$ ← $-\frac{۲}{۵}$ ← $\boxed{\frac{۱}{۲۵}}$

$$۵^{-۲}=\frac{۱}{۵^{۲}}=\frac{۱}{۲۵}$$

و) $(-۲)^{۳}$ ← $۳^{-۲}$ ← $\boxed{-۸}$

$$(-۲)^{۳}=(-۲)\times(-۲)\times(-۲)=-۸$$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود $۱۰^{-۲۴}$ گرم است. جرم یک وزنهٔ ۱۰۰ کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

هریک کیلوگرم برابر ۱۰۰۰ گرم است، پس ۱۰۰ کیلوگرم، ۱۰۰۰۰۰ گرم یا $۱۰^{۵}$ گرم است. برای حل این مسئله باید جرم وزنه را که $۱۰^{۵}$ گرم است را بر جرم اتم هیدروژن تقسیم کنیم تا مشخص شود چند برابر آن جرم دارد.

$$۱۰^{۵}\div۱۰^{-۲۴}=۱۰^{۵-(-۲۴)}=۱۰^{۵+۲۴}=۱۰^{۲۹}$$

۳- عددهای $۱۶^{۳}$ و $۸^{۴}$ و $۲^{۱۱}$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

$$\left.\begin{array}{l}۱۶^{۳}=(۲^{۴})^{۳}=۲^{۱۲}\\ ۸^{۴}=(۲^{۳})^{۴}=۲^{۱۲}\end{array}\right\}\Rightarrow ۲^{۱۱}<۸^{۴}=۱۶^{۳}$$

۴- در جاهای خالی علامت $<$ ، $>$ یا $=$ قرار دهید:

الف) $\frac{۱}{۳}=۳^{-۱}\ \boxed{>}\ ۳^{-۲}=\frac{۱}{۹}$

ب) $۱=۳^{۰}\ \boxed{>}\ ۲^{-۵}=\frac{۱}{۳۲}$

ج) $۴=(\frac{۱۰}{۵})^{۲}=(۰/۵)^{-۲}\ \boxed{>}\ (۰/۶)^{-۲}=(\frac{۱۰}{۶})^{-۲}=\frac{۲۵}{۹}$

د) $\frac{۱}{۵}=۵^{-۱}\ \boxed{>}\ ۰$

هـ) $۱=(\frac{-۸}{۱۵})^{۰}\ \boxed{=}\ ۱$

و) $-\frac{۱}{۲۵}=-۵^{-۲}\ \boxed{<}\ (-۵)^{-۲}=\frac{۱}{۲۵}$

۵- در هریک از تساوی‌های زیر x چه عددی است؟

الف) $۵^{x}\times۵^{-۳}=۵^{۴}$

$x+(-۳)=۴\Rightarrow\boxed{x=۷}$

ب) $۵^{x}\div۵^{-۳}=۵^{۴}$

$x-(-۳)=۴\Rightarrow\boxed{x=۱}$

۶- کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) $a^{۴}\times a^{۵}=a^{۲۰}$ نادرست $(a^{۴}\times a^{۵}=a^{۹})$

ب) $a^{۴}\times a^{۵}=a^{۹}$ درست

ج) $(a^{m})^{n}=(a^{n})^{m}$ درست $a>۰$

د) $۳^{-۲}=-۹$ نادرست $(۳^{-۲}=\frac{۱}{۳^{۲}}=\frac{۱}{۹})$

هـ) $(-۳)^{۰}+(۳^{-۱})^{-۱}=۴$ درست

و) $۳^{-۱}\times۴^{-۱}=۱۲^{-۲}$ نادرست $(۳\times۴)^{-۱}=(۱۲)^{-۱}$

ز) $۶^{-۲}=\frac{-۲}{۶}$ $(۶^{-۲}=\frac{۱}{۶^{۲}}=\frac{۱}{۳۶})$ نادرست

ح) $۳^{-۱}>۳^{-۱۰}$ درست

۷- حاصل هر عبارت را به‌دست آورید.

الف) $(\frac{۱}{۳})^{-۱۰}\times۲۷^{-۳}=۳^{۱۰}\times(۳^{۳})^{-۳}=۳^{۱۰}\times۳^{-۹}=۳^{۱}$

ب) $(۰/۲)^{-۴}\times(۲۵)^{-۲}=(\frac{۱}{۵})^{-۴}\times(۵^{۲})^{-۲}=۵^{۴}\times۵^{-۴}=۵^{۰}=۱$

ج) $(\frac{۱۵}{۱۴})^{-۴}\times(\frac{۴۵}{۲۸})^{۴}=(\frac{۱۴}{۱۵})^{۴}\times(\frac{۴۵}{۲۸})^{۴}=(\frac{\cancel{۱۴}^{۱}}{\cancel{۱۵}_{۱}}\times\frac{\cancel{۴۵}^{۳}}{\cancel{۲۸}_{۲}})^{۴}=(\frac{۳}{۲})^{۴}$

د) $(-۵^{-۲})^{-۱}=(\frac{۱}{-۵^{۲}})^{-۱}=(\frac{۱}{-۲۵})^{-۱}=-۲۵$

BIAMOZ.com

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$-2^{-4} \text{ و } 1^{-90} \text{ و } (-1)^{21} \text{ و } (-7)^2 \text{ و } (-\frac{1}{2})^{-2} \text{ و } 2^3 \text{ و } 5^{-3} \text{ و } 2^{-3}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{-1}{16} \quad 1 \quad -1 \quad 49 \quad 4 \quad 8 \quad \frac{1}{125} \quad \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow (-1)^{21} < -2^{-4} < 5^{-3} < 2^{-3} < 1^{-90} < (-\frac{1}{2})^{-2} < 2^3 < (-7)^2$$

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$(\frac{3}{4})^2 > (0/75)^3$ درست

$(\frac{5}{4})^2 < (0/7)^2$ نادرست

$(1/2)^7 < (1/02)^7$ نادرست

$(0/987)^{10} < 10^0$ درست

یادآوری

۱) عددهای بین صفر و یک هرچه به توان بیشتری برسند، کوچک‌تر می‌شوند.

۲) عددهای بیشتر از یک هرچه به توان بیشتری برسند، بزرگ‌تر می‌شوند.

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{(\frac{2}{3})^3 \times (\frac{8}{3})^{-3}}{-2^5 \times 2^{-8}} = \frac{(\frac{2}{3})^3 \times (\frac{3}{8})^3}{-2^{5+(-8)}} = \frac{(\frac{1}{4})^3}{-2^{-3}} = -(\frac{1}{4})^3 \times 2^3 = -(\frac{2}{4})^3 = -\frac{1}{8}$

ب) $\left[-(\frac{2}{3})^{-2}\right]^{-1} = \left[-(\frac{3}{2})^2\right]^{-1} = \left[-\frac{9}{4}\right]^{-1} = -\frac{4}{9}$

ارزشیابی مستمر

۱- عبارت‌های زیر را با توان مثبت بنویسید. (۱/۵ نمره)

الف) $(\frac{3}{2})^{-4}$ ب) $\frac{1}{2^{-3}}$ ج) $(0/2)^{-3}$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. (۲)

الف) $2^{-1} + 3^{-2}$ ب) $(\frac{2}{3})^{-1} + (\frac{1}{4})^2$

ج) $-(-3)^{-2}$ د) $3^0 - 3^{-1}$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت توان‌دار بنویسید. (۴)

الف) $(-3)^{-4} \times 3^7$ ب) $\left[-(-\frac{1}{2})^{-3}\right]^{-1}$

ج) $\frac{x^{15}.y^2.z^{-4}}{x^{-7}.y^5.z^3}$ د) $\frac{3^5 \div (\frac{1}{3})^{-2}}{9^4 \div 9}$

۴- اعداد 81^3 و 9^5 و 27^5 را مقایسه کنید. (۱/۵)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱

الف) $(\frac{3}{2})^{-4} = (\frac{2}{3})^4$ (۰/۵)

ب) $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$ (۰/۵)

ج) $(0/2)^{-3} = (\frac{10}{2})^3 = 5^3$ (۰/۵)

BIAMOZ.com

۲

الف) $۲^{-۱}+۳^{-۲}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳^۲}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۹}=\frac{۹+۲}{۱۸}=\frac{۱۱}{۱۸}$ (۰/۵)

ب) $(\frac{۲}{۳})^{-۱}+(\frac{۱}{۴})^{-۲}=\frac{۳}{۲}+۴^۲=\frac{۳}{۲}+\frac{۱۶}{۱}=\frac{۳+۳۲}{۲}=\frac{۳۵}{۲}$ (۰/۵)

ج) $-(-۳)^{-۲}=-(\frac{۱}{-۳})^۲=-\frac{۱}{۹}$ (۰/۵)

د) $۳^۰-۳^{-۱}=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۳-۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$ (۰/۵)

۳

الف) $(-۳)^{-۴}\times۳^۷=۳^{-۴}\times۳^۷=۳^۳$ (۱)

ب) $\left[-(-\frac{۱}{۲})^{-۳}\right]^{-۱}=\left[-(-۲)^۳\right]^{-۱}=\left[-(-۲^۳)\right]^{-۱}=[۸]^{-۱}=\frac{۱}{۸}$ (۱)

ج) $\frac{x^{۱۵}.y^۲.z^{-۴}}{x^{-۷}.y^۵.z^۳}=\frac{x^{۱۵}}{x^{-۷}}\times\frac{y^۲}{y^۵}\times\frac{z^{-۴}}{z^۳}=\frac{x^{۲۲}}{y^۳.z^۷}$

د) $\frac{۳^۵\div(\frac{۱}{۳})^{-۲}}{۹^۴\div۹}=\frac{۳^۵\times۳^{-۲}}{۹^۳}=\frac{۳^۳}{(۳^۲)^۳}=\frac{۳^۳}{۳^۶}=\frac{۱}{۳^۳}=۳^{-۳}$ (۱)

۴

$\left.\begin{array}{l}۲۷^۵=(۳^۳)^۵=۳^{۱۵}\ (۰/۲۵)\\ ۹^۵=(۳^۲)^۵=۳^{۱۰}\ (۰/۲۵)\\ ۸۱^۳=(۳^۴)^۳=۳^{۱۲}\ (۰/۲۵)\end{array}\right\}\Rightarrow ۹^۵<۸۱^۳<۲۷^۵$ (۰/۷۵)

۲ درس نماد علمی

چکیده درس:

✪ نکته ۸ : حاصل ۱۰^n برابر است با یک عدد یک که جلوی آن n تا صفر قرار بگیرد. مانند $۱۰^۵=۱۰۰۰۰۰$.

✪ نکته ۹ : اگر بخواهیم عددی را بر توانی از ۱۰ تقسیم کنیم کافی است جای ممیز عدد داده شده را به تعداد صفرهای جلوی یک (توان ۱۰) به سمت چپ منتقل کنیم. اگر بخواهیم عددی را در توانی از ۱۰ ضرب کنیم کافی است جای ممیز را به تعداد صفرهای جلوی یک (توان ۱۰) به سمت راست منتقل کنیم.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$۳/۲\div۱۰^۳=۳/۲\div۱۰۰۰=۰/۰۰۳۲$

(ممیز ۳ رقم به چپ منتقل شد.)

$۳/۲\times۱۰^۳=۳/۲\times۱۰۰۰=۳۲۰۰/۰=۳۲۰۰$

(ممیز ۳ رقم به راست منتقل شد.)

نکته ۱۰: هرگاه عددی حقیقی را به شکل $a\times۱۰^n$ بنویسیم که در آن a عددی بین یک تا ۱۰ و n عددی صحیح باشد، می‌گوییم آن عدد را به صورت نماد علمی نوشته‌ایم.

$a\times۱۰^n,(۱\le a<۱۰,n\in\mathbb{Z})$

مثال: عدد ۰/۰۰۰۳ با نماد علمی به صورت ۳×۱۰^{-۴} نوشته می‌شود.

مثال: عدد ۱۲۰۰۰۰ با نماد علمی به صورت $۱/۲\times۱۰^۵$ نوشته می‌شود.

✪ **مثال: اعداد زیر را با نماد علمی بنویسید.**

$۳۲۴۰۰۰۰=۳/۲۴\times۱۰^۶$

$۰/۰۰۰۲۱۵=۲/۱۵\times۱۰^{-۴}$

مثال: اعداد زیر را از صورت نماد علمی به صورت اعشاری برگردانید.

$۳/۵\times۱۰^{-۳}=۰/۰۰۳۵$

$۴\times۱۰^۳=۴۰۰۰$

$۲/۲۵\times۱۰^۷=۲۲۵۰۰۰۰۰$

$۱۰^{-۳}=۰/۰۰۱$

BIAMOZ.com

فعالیت ۶۵

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل ضرب آنها در توان‌های ۱۰ یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های ۱۰ خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می‌کند؟

تقسیم بر 10^5	ضرب در 10^5	تقسیم بر 10^4	ضرب در 10^4	تقسیم بر ۱۰۰۰	ضرب در ۱۰۰۰	تقسیم بر ۱۰۰	ضرب در ۱۰۰	تقسیم بر ۱۰	ضرب در ۱۰	عدد
۰/۰۰۰۱۵	۱۵۰۰۰۰۰	۰/۰۰۱۵	۱۵۰۰۰۰	۰/۰۱۵	۱۵۰۰۰	۰/۱۵	۱۵۰۰	۱/۵	۱۵۰	۱۵
۰/۰۰۰۰۰۰۲	۲۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۲	۲۰۰	۰/۰۰۰۰۲	۲۰	۰/۰۰۰۲	۲	۰/۰۰۲	۰/۲	۰/۰۲
۰/۰۰۰۹۳	۹۳۰۰۰۰۰	۰/۰۰۹۳	۹۳۰۰۰۰	۰/۰۹۳	۹۳۰۰۰	۰/۹۳	۹۳۰۰	۹/۳	۹۳۰	۹۳

همان‌طور که در جدول فوق دیده می‌شود هنگامی که می‌خواهیم عددی را در 10^n ضرب کنیم، کافی است مکان ممیز را n رقم (به تعداد توان) به سمت راست منتقل و هنگامی که می‌خواهیم عددی را بر 10^n تقسیم کنیم، مکان ممیز را n رقم به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

۲- سرعت نور ۳۰۰,۰۰۰,۰۰۰ متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در ۱۰۰ ساعت می‌پیماید چند متر است؟ راه‌حل این مسئله در ادامه داده شده است. توضیح دهید که حل چگونه به‌دست آمده است.

ثانیه ۳۶۰۰=۱ ساعت
ثانیه ۳۶۰۰۰۰=۱۰۰ ساعت

فاصله‌ای که نور در ۱۰۰ ساعت می‌پیماید. $\Rightarrow 300000000 \times 360000 =$

ابتدا باید ۱۰۰ ساعت را بر حسب ثانیه به دست آوریم. از آنجا که هر ساعت ۳۶۰۰ ثانیه است، نتیجه می‌گیریم که هر ۱۰۰ ساعت ۳۶۰۰۰۰ ثانیه است و سپس این عدد را در سرعت نور ضرب می‌کنیم تا مسافت طی شده به‌دست‌آید.

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هرکدام از این عددها را به صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد ۱۰ نمایش می‌دهند که آن را «نماد علمی» آن عدد می‌گویند، بنابراین:

$$300000000 = 3 \times 10^8 \quad 36000 = 3/6 \times 10^5 \Rightarrow 3 \times 10^8 \times 3/6 \times 10^5 = 10/8 \times 10^{13} = 1/08 \times 10^{14}$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است.

این‌گونه نمایش به جز سادگی در نوشتن، محاسبات را آسان‌تر می‌کند و در ضمن نوعی نظم و هماهنگی در نمایش عددهای بزرگ (یا کوچک) به شمار می‌آید.

کار در کلاس ۶۶

۱- هریک از عددهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید:

$0/005 = 0/5 \times 10^{-2}$ $\quad 150000000 = 1/5 \times 10^8$ $\quad 245000 = 2/45 \times 10^5$

$0/1275 = 1/275 \times 10$ $\quad 1404 = 1/404 \times 10^3$ $\quad 0/000061 = 6/1 \times 10^{-5}$

۲- نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید:

$7/304 \times 10^{-5} = 0/0000\,7304$ $\quad 5/2 \times 10^{-3} = 0/0052$

$9/4612 \times 10^9 = 9461200000$ $\quad 2/28 \times 10^8 = 228000000$

$1/1 \times 10^4 = 11000$ $\quad 6/02 \times 10^{-2} = 0/0602$

تمرین ۶۷

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}} = \frac{30^{-5} \times 25}{60^{-5}} = (\frac{30}{60})^{-5} \times 25 = (\frac{1}{2})^{-5} \times 25 = 2^5 \times 25 = 32 \times 25 = 800$

BIAMOZ.com

ب) $\frac{۸^{-۱}\times۴^{۲}}{۲^{-۴}\times\frac{۱}{۸}}=\frac{\frac{۱}{۸}\times۱۶}{\frac{۱}{۱۶}\times\frac{۱}{۸}}=\frac{۱۶}{\frac{۱}{۱۶}}=۱۶\times۱۶=۲۵۶$

۲- کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

درست $۵/۹\times۱۰^{-۱}=۰/۵۹$

نادرست $۷/۰۰۴\times۱۰^{-۲}=۰/۷۰۰۴$

درست $۸/۲۵۷۰\times۱۰^{۴}=۸۲۵۷۰$

نادرست $۱/۰۲\times۱۰^{-۵}=۰/۰۰۰۰۰۱۰۲$

درست $۴/۳\times۱۰^{۳}=۴۳۰۰$

درست $۶/۱۸\times۱۰^{۷}=۶۱۸۰۰۰۰۰$

۳- شعاع خورشید تقریباً ۶۹۵۰۰۰ کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

$۶۹۵۰۰۰=۶/۹۵\times۱۰^{۵}$

۴- اندازه یک باکتری ۰/۰۰۰۰۰۰۵ متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

$۰/۰۰۰۰۰۰۵=۵\times۱۰^{-۷}$

۵- قطر خورشید حدود $۱/۴\times۱۰^{۹}$ متر و قطر زمین حدود $۱/۳\times۱۰^{۷}$ متر است. قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر زمین است؟ باید قطر خورشید را بر قطر زمین تقسیم کنیم تا معلوم شود چند برابر آن است:

$$(۱/۴\times۱۰^{۹})\div(۱/۳\times۱۰^{۷})=\frac{۱/۴\times۱۰^{۹}}{۱/۳\times۱۰^{۷}}=\frac{۱۴\times۱۰^{-۱}\times۱۰^{۹}}{۱۳\times۱۰^{-۱}\times۱۰^{۷}}=\frac{۱۴}{۱۳}\times۱۰^{۲}\simeq۱/۱\times۱۰^{۲}=۱۱۰$$

قطر خورشید تقریبا ۱۱۰ برابر قطر زمین است.

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید:

$$۲\times۱۰^{-۷}\times۴\times۱۰^{۹}=(۲\times۴)\times(۱۰^{-۷}\times۱۰^{۹})=۸\times۱۰^{۲}$$

$$\frac{۱۲/۵\times۱۰^{-۴}}{۲۵\times۱۰^{-۱۹}}=\frac{۱۲/۵}{۲۵}\times\frac{۱۰^{-۴}}{۱۰^{-۱۹}}=۰/۵\times۱۰^{۱۵}=۵\times۱۰^{۱۴}$$

۷- فاصلهٔ مریخ از زمین حدود $۹/۱۷\times۱۰^{۷}$ کیلومتر و فاصلهٔ کیوان از زمین حدود $۶/۲۸۷\times۱۰^{۸}$ کیلومتر است. با مقایسهٔ این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک‌تر است؟

$$۶/۲۸۷\times۱۰^{۸}=۶۲/۸۷\times۱۰^{۷}\Rightarrow۶۲/۸۷\times۱۰^{۷}>۹/۱۷\times۱۰^{۷}$$

فاصلهٔ کیوان از زمین بیشتر از فاصلهٔ مریخ از زمین است، پس مریخ به زمین نزدیک‌تر است.

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

در جای خالی می‌توان اعداد ۰ و ۱- و ۲- و ... را قرار داد. $۰/۰۳>۰/۰۰۳\times۱۰^{\square}$

در جای خالی می‌توان اعداد ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و... قرار داد. $۲/۷\times۱۰^{\square}>۰/۰۲$

۹- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$\underbrace{۱/۵\times۱۰^{-۲}}_{۰/۰۱۵},\underbrace{۱/۲\times۱۰^{۶}}_{۱۲۰۰۰۰۰},\underbrace{۵/۳۵\times۱۰^{-۳}}_{۰/۰۰۵۳۵},\underbrace{۳/۷\times۱۰^{-۲}}_{۰/۰۳۷}$$

$$۵/۳۵\times۱۰^{-۳}<۱/۵\times۱۰^{-۲}<۳/۷\times۱۰^{-۲}<۱/۲\times۱۰^{۶}$$

ارزشیابی مستمر

۱- عددهای زیر را به صورت نماد علمی بنویسید. (۴ نمره)

الف) ۲۳۰۰۰ ب) $۲۱/۲\times۱۰^{-۴}$ ج) ۰/۰۰۰۳۲ د) ۲۳۵۴×۱۰^{۲}

۲- عددهای زیر را از صورت نماد علمی خارج کنید و به صورت اعشاری بنویسید. (۲)

الف) $۱/۳\times۱۰^{۴}$ ب) $۵/۲۱\times۱۰^{-۷}$

۳- حاصل عبارت $\frac{۲/۱\times۱۰^{-۴}}{۰/۴۲\times۱۰^{-۷}}$ را بیابید و با نماد علمی بنویسید. (۲)

۴- اعداد $۱۳/۱\times۱۰^{۵}$ و ۱۳۲۰×۱۰^{۳} را مقایسه کنید. (۱)

BIAMOZ.com

۱ ب) $۲۱/۲\times۱۰^{-۴}=۲/۱۲\times۱۰^{-۳}$ (۱)

الف) $۲۳۰۰۰=۲/۳\times۱۰^{۴}$ (۱)

د) $۲۳۵۴\times۱۰^{۲}=۲/۳۵۴\times۱۰^{۳}\times۱۰^{۲}=۲/۳۵۴\times۱۰^{۵}$ (۱)

ج) $۰/۰۰۰۳۲=۳/۲\times۱۰^{-۴}$ (۱)

۲ ب) $۵/۲۱\times۱۰^{-۷}=۰/۰۰۰۰۰۰۵۲۱$ (۱)

۳ الف) $۱/۳\times۱۰^{۴}=۱۳۰۰۰$ (۱)

۴ $\frac{۲/۱\times۱۰^{-۴}}{۰/۴۲\times۱۰^{-۷}}=\frac{۲۱\times۱۰^{-۱}\times۱۰^{-۴}}{۴۲\times۱۰^{-۲}\times۱۰^{-۷}}=\frac{۱۰^{-۵}}{۲\times۱۰^{-۹}}=\frac{۱}{۲\times۱۰^{-۴}}=\frac{۱}{۲}\times۱۰^{۴}=۰/۵\times۱۰^{۴}=۵\times۱۰^{۳}$ (۰/۵)

(۰/۵) (۰/۵) (۰/۵)

$\left.\begin{array}{l}۱۳/۱\times۱۰^{۵}=۱/۳۱\times۱۰^{۶}\ (۰/۲۵)\\ ۱۳۲۰\times۱۰^{۳}=۱/۳۲۰\times۱۰^{۳}\times۱۰^{۳}=۱/۳۲\times۱۰^{۶}\ (۰/۲۵)\end{array}\right\}\rightarrow ۱۳/۱\times۱۰^{۵}<۱۳۲۰\times۱۰^{۳}$

۲ درس ریشه‌گیری

چکیده درس:

نکته ۱۱: می‌گوییم a ریشه دوم b است هرگاه $a^۲=b$. مثلاً ۲ ریشه دوم ۴ است، زیرا $۴=۲^۲$. همچنین (۲-) نیز ریشه دوم ۴ است، زیرا $۴=(-۲)^۲$.

نکته ۱۲: تنها اعداد حقیقی نامنفی دارای ریشه دوم هستند، زیرا توان دوم هیچ عدد حقیقی منفی نمی‌شود.

نکته ۱۳: هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه دوم است. مثلاً ریشه‌های دوم عدد a، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ هستند.

مثال: ریشه‌های دوم عدد ۹ عبارتند از ۳ و ۳- . ریشه‌های دوم عدد ۳ عبارتند از $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$.

نکته ۱۴: اگر a عددی حقیقی باشد، داریم:

$\sqrt{a^۲}=|a|$

مثال: $\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}=|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})=-۱+\sqrt{۲}$

$\sqrt{(-۲)^۲}=|-۲|=۲$

نکته ۱۵: می‌گوییم a ریشه سوم b است، هرگاه $a^۳=b$. در این صورت می‌نویسیم « $\sqrt[۳]{b}=a$ » و می‌خوانیم «رادیکال b به فرجه ۳ برابر است با a».

نکته ۱۶: هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

مثال: ریشه سوم ۲۷ برابر با ۳ است، زیرا $۳^۳=۲۷$. همچنین ریشه سوم ۱۲۵- برابر (۵-) است، زیرا $(-۵)^۳=-۱۲۵$.

نکته ۱۷: برای ضرب و تقسیم رادیکال‌ها از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

الف) $\begin{cases}\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}\\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\end{cases}$

ب) $\begin{cases}\sqrt[۳]{a}\times\sqrt[۳]{b}=\sqrt[۳]{ab}\\ \frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{b}}=\sqrt[۳]{\frac{a}{b}}\end{cases}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$\sqrt{۴}\times\sqrt{۲۵}=\sqrt{۴\times۲۵}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$

$\sqrt{۳}\times\sqrt{۲۷}=\sqrt{۳\times۲۷}=\sqrt{۸۱}=۹$

$\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{۲\times۴}=\sqrt[۳]{۸}=۲$

$\sqrt[۳]{-۹}\times\sqrt[۳]{-۳}=\sqrt[۳]{(-۹)\times(-۳)}=\sqrt[۳]{۲۷}=۳$

$\frac{\sqrt[۳]{-۲۴}}{\sqrt[۳]{۳}}=\sqrt[۳]{\frac{-۲۴}{۳}}=\sqrt[۳]{-۸}=-۲$

$\frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{\frac{۳۲}{۲}}=\sqrt{۱۶}=۴$

نکته ۱۸: توجه کنید که $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

نکته ۱۹: اگر a عدد حقیقی مثبتی باشد داریم: $(\sqrt{a})^۲=a$

نکته ۲۰: برای هر عدد حقیقی داریم: $(\sqrt[۳]{a})^۳=a$

مثال: عبارت‌های رادیکالی زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\sqrt{۱۸}=\sqrt{۹\times۲}=\sqrt{۹}\times\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$

ب) $\sqrt[۳]{۲۴}=\sqrt[۳]{۸\times۳}=\sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۳]{۳}=۲\sqrt[۳]{۳}$

ج) $(\sqrt{۲})^۵=(\sqrt{۲})^۴\times(\sqrt{۲})^۱=۲^۲\times\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$

د) $(\sqrt[۳]{۳})^۴=(\sqrt[۳]{۳})^۳\times(\sqrt{۳})^۱=۳\sqrt[۳]{۳}$

BIAMOZ.com

فعالیت

۱- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مانند نمونه‌ها به‌دست آورید:

$(-\frac{۲}{۳})^۲ = \frac{۴}{۹}$ $\quad (\frac{۱}{۷})^۲ = \frac{۱}{۴۹}$ $\quad (\sqrt{۵})^۲ = ۵$ $\quad (-۳)^۲ = ۹$

$(-۴)^۲ = ۱۶$ $\quad ۴^۲ = ۱۶$ $\quad (-\frac{۱}{۷})^۲ = \frac{۱}{۴۹}$ $\quad (-\sqrt{۵})^۲ = ۵$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید:

عدد	$-\sqrt{۶}$	$\sqrt{۶}$	$-\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$-\sqrt{۵}$	$\sqrt{۵}$	$-\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	-۴	۴	-۳	۳
مربع عدد (توان دوم)	۶		$\frac{۱}{۴۹}$		۵		$\frac{۴}{۹}$		۱۶		۹	

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۰	$-\frac{۲}{۳}$	۵	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۵}$	۴	-۳	۳	-۲	۲
مکعب عدد (توان سوم)	۰	$-\frac{۸}{۲۷}$	۱۲۵	$-\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۲۵}$	۶۴	-۲۷	۲۷	-۸	۸

به کمک جدول قبل دیده می‌شود که ریشهٔ سوم عدد ۶۴ برابر ۴ و ریشه سوم عدد $-\frac{۸}{۲۷}$ عدد $-\frac{۲}{۳}$ است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید:

$\sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$ $\quad \sqrt[۳]{۱۲۵} = ۵$ $\quad \sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}} = -\frac{۱}{۲}$ $\quad (\sqrt[۳]{۸})^۳ = ۸$

کار در کلاس

۱-حاصل هر عبارت را به‌دست آورید:

$\sqrt[۳]{-۱} = -۱$ $\quad \sqrt{(-۴)^۲} = \sqrt{۴^۲} = ۴$ $\quad \sqrt{۴^۲} = ۴$ $\quad \sqrt{۸۱} = ۹$

$\sqrt[۳]{(-۷)^۳} = -۷$ $\quad \sqrt[۳]{-\frac{۸}{۱۰۰۰}} = \frac{-۲}{۱۰}$ $\quad \sqrt[۳]{۶^۳} = ۶$ $\quad \sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۱۲۵}} = \frac{۳}{۵}$

۲- به کمک رابطه $\sqrt{x^۲} = |x|$ که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید:

$\sqrt{(-\frac{۳}{۵})^۲} = |-\frac{۳}{۵}| = \frac{۳}{۵}$ $\quad \sqrt{۸^۲} = |۸| = ۸$ $\quad \sqrt{(-۶)^۲} = |-۶| = ۶$

$\sqrt{(۱-\frac{۱}{۳})^۲} = |۱-\frac{۱}{۳}| = |\frac{۲}{۳}| = \frac{۲}{۳}$ $\quad \sqrt{(۲-۹)^۲} = |۲-۹| = |-۷| = ۷$ $\quad \sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲} = |۱-\sqrt{۲}| = -۱+\sqrt{۲}$

۳- حاصل عبارت $\sqrt{x^۲} + \sqrt{y^۲}$ را در هریک از حالت‌های زیر به‌دست آورید؛ یکی از حالت‌ها حل شده است.

الف) x و y هردو مثبت هستند $(x>۰, y>۰)$. $\quad \sqrt{x^۲} + \sqrt{y^۲} = |x| + |y| = x + y$

ب) x مثبت و y منفی است $(x>۰, y<۰)$. $\quad \sqrt{x^۲} + \sqrt{y^۲} = |x| + |y| = x - y$

ج) x منفی و y مثبت است $(x<۰, y>۰)$. $\quad \sqrt{x^۲} + \sqrt{y^۲} = |x| + |y| = -x + y = y - x$

د) x و y هردو منفی هستند $(x<۰, y<۰)$. $\quad \sqrt{x^۲} + \sqrt{y^۲} = |x| + |y| = -x - y$

BIAMOZ.com

فعالیت ۷۰

با توجه به عددهای داده شده a و b جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسهٔ دو ستون آخر جدول چه حدسی می‌زنید؟

a	$\sqrt[3]{a}$	b	$\sqrt[3]{b}$	ab	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	$۲\times۵=۱۰$
۲۷	۳	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲۷}{۸}$	$\frac{۳}{۲}$	$۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$
-۸	-۲	۲۷	۳	-۲۱۶	-۶	$-۲\times۳=-۶$

با مقایسه دو ستون آخر این جدول می‌توان حدس زد که حاصل ضرب ریشه‌های سوم دو عدد حقیقی برابر است با ریشه سوم حاصل‌ضرب آنها، به زبان ریاضی داریم:

$$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$$

کار در کلاس ۷۰

۱- آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید.

$$\sqrt[3]{۸}+\sqrt[3]{۲۷}=\sqrt[3]{۸+۲۷}$$

خیر، برقرار نیست.

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.

«سمت چپ تساوی، برابر با ۵ می‌باشد، درحالی‌که سمت راست کمتر از ۴ است.»

$$\text{سمت چپ}=\sqrt[3]{۸}+\sqrt[3]{۲۷}=۲+۳=۵$$

$$\text{سمت راست}=\sqrt[3]{۸+۲۷}=\sqrt[3]{۳۵}<(\sqrt[3]{۶۴}=۴)$$

این استدلال درست است. در این استدلال از این نکته استفاده شده است که اگر تساوی داده شده در سؤال درست باشد باید هر دو طرف آن دارای مقدارهای برابر باشند. اما محاسبه نشان می‌دهد که این طور نیست.

۲- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید:

$$۳\sqrt[3]{-۲}\times۵\sqrt[3]{۴}=۱۵\sqrt[3]{-۸}=۱۵\times(-۲)=-۳۰$$

$$\sqrt[3]{۴}\times\sqrt[3]{۱۶}=\sqrt[3]{۴\times۱۶}=\sqrt[3]{۶۴}=۴$$

$$\sqrt[3]{۲۰}=\sqrt[3]{۴}\times\sqrt[3]{۵}$$

$$\sqrt[3]{۱۲۸}=\sqrt[3]{۶۴}\times\sqrt[3]{۲}=۴\sqrt[3]{۲}$$

$$\frac{\sqrt[3]{-۵۴}}{\sqrt[3]{۲}}=\sqrt[3]{\frac{-۵۴}{۲}}=\sqrt[3]{-۲۷}=-۳$$

$$\sqrt[3]{\frac{۱۲۵}{۶۴}}=\frac{\sqrt[3]{۱۲۵}}{\sqrt[3]{۶۴}}=\frac{۵}{۴}$$

تمرین ۷۱

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید:

$$\frac{۴۹}{۱۶},\frac{۱}{۸۱},۱۵,۱۴۴,۱۲,۱۸$$

$$\frac{۴۹}{۱۶}\to\frac{۷}{۴},\frac{-۷}{۴}$$

$$\frac{۱}{۸۱}\to\frac{۱}{۹},\frac{-۱}{۹}$$

$$۱۵\to\sqrt{۱۵},-\sqrt{۱۵}$$

$$۱۴۴\to۱۲,-۱۲$$

$$۱۲\to\sqrt{۱۲},-\sqrt{۱۲}$$

$$۱۸\to\sqrt{۱۸},-\sqrt{۱۸}$$

۲- ریشهٔ سوم عددهای زیر را به دست آورید:

$$۲۱۶,۷^۳,-۵,\frac{-۱}{۲۱۶},۱۰$$

$$\sqrt[3]{۲۱۶}=۶\ ,\ \sqrt[3]{۷^۳}=۷\ ,\ \sqrt[3]{-۵}=-\sqrt[3]{۵}\ ,\ \sqrt[3]{\frac{-۱}{۲۱۶}}=\frac{-۱}{۶}\ ,\ \sqrt[3]{۱۰}=\sqrt[3]{۵}\times\sqrt[3]{۲}$$

BIAMOZ.com

۳- کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

درست $\sqrt[۳]{(-۵)^۳}=-۵$ درست $\sqrt{(-۵)^۲}=|-۵|=۵$ درست $\sqrt[۳]{(-۱)^۳}=-۱$ نادرست $\sqrt{(-۱)^۲}=-۱$

درست $\sqrt[۳]{-۶۴}=-۴$ درست $\sqrt{(-۱)^۲}=۱$ درست $\sqrt{۱/۴۴}=۱/۲$ درست $-\sqrt{\frac{۴۹}{۲۵۶}}=-\frac{۷}{۱۶}$

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید:

$\sqrt[۳]{۱۲۵}\times\sqrt{۳۶}$	$\sqrt[۳]{-۱}\times\sqrt{۸۱}$	$\sqrt[۳]{\frac{۸۱}{۳}}$	$\sqrt[۳]{-۲۵}\times\sqrt[۳]{۵}$
۳	۳۰	-۹	-۵

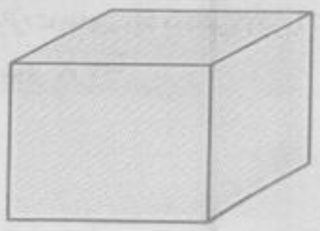
۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست باشد:

$\sqrt[۳]{a}<\sqrt{۴} \rightarrow a=۷,۶,۵,...$

۶- رابطه $\sqrt{(-x)^۲}=x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

به شرطی که $x\geq ۰$ (یعنی x نامنفی) باشد. مثلاً اگر $x=۴$ باشد، رابطه $\sqrt{(-۴)^۲}=۴$ برقرار است. اما اگر $x=-۱$ باشد، آنگاه $\sqrt{(-(-۱))^۳}=-۱$ ، که درست نیست. زیرا عبارت $\sqrt{a}$ همواره باید مقداری نامنفی باشد.

۷- اگر مساحت کل یک مکعب $۹۶a^۲$ باشد، حجم آن را بر حسب a به‌دست آورید.



چون مکعب از به هم چسبیدن شش وجه مربع شکل به‌دست می‌آید.
ابتدا عبارت $۹۶a^۲$ را بر ۶ تقسیم می‌کنیم تا مساحت یک وجه آن به دست آید.

$$\frac{\overset{۱۶}{\cancel{۹۶}}a^۲}{\cancel{۶}_{۱}}=۱۶a^۲$$

حال از آنجا که مساحت مربع از به توان ۲ رساندن اندازه یک ضلع آن به‌دست می‌آید، کافی است جذر عدد $۱۶a^۲$ را بیابیم تا ضلع مربع به‌دست آید:

اندازهٔ ضلع مربع $=\sqrt{۱۶a^۲}=۴a$

$\Rightarrow$ حجم مکعب $=(۴a)^۳=۶۴a^۳$

۸- اگر $x>۰$ و $y<۰$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x^۲}-\sqrt{y^۲}$ را ساده کنید و بدون قدر مطلق بنویسید.

$$\sqrt{x^۲}-\sqrt{y^۲}=|x|-|y|\overset{x>۰,y<۰}{=\!=\!=}x-(-y)=x+y$$

۹- عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید:

$\sqrt{۹۰}=\sqrt{۲\times۳^۲\times۵}=\sqrt{۳^۲}\times\sqrt{۱۰}=۳\sqrt{۱۰}$

$\sqrt{۸۰}=\sqrt{۲^۴\times۵}=\sqrt{۴^۲}\times\sqrt{۵}=۴\sqrt{۵}$

$\sqrt[۳]{۱۲۵^۲}=\sqrt[۳]{(۵^۳)^۲}=\sqrt[۳]{(۵^۲)^۳}=۵^۲=۲۵$

$\sqrt{۱۵۰}=\sqrt{۵^۲\times۳\times۲}=۵\sqrt{۶}$

$\sqrt{۲۴}=\sqrt{۲^۳\times۳}=\sqrt{۲^۲}\times\sqrt{۶}=۲\sqrt{۶}$

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟ بله هر دو رابطه درست هستند.

$(\sqrt[۳]{-۲})^۳=-۲$ درست

$(\sqrt[۳]{-۲})^۳=(\sqrt[۳]{-۲}\times\sqrt[۳]{-۲}\times\sqrt[۳]{-۲})=(\sqrt[۳]{-۸})=-۲$

$\sqrt[۳]{-۴}=-\sqrt[۳]{۴}$ درست

$\sqrt[۳]{-۴}=\sqrt[۳]{۴\times(-۱)}=\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{-۱}=-\sqrt[۳]{۴}$

۱۱- حاصل را به‌دست آورید:

$۲\sqrt[۳]{۱۶}\times۳\sqrt[۳]{۴}=(۲\times۳)\times\sqrt[۳]{۱۶}\times\sqrt[۳]{۴}=۶\times\sqrt[۳]{۶۴}=۶\times۴=۲۴$

$\frac{\sqrt{۸}\times\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۴۰}}{\sqrt{۱۰}}=\sqrt{\frac{۴۰}{۱۰}}=\sqrt{۴}=۲$

$\frac{\sqrt[۳]{۱۸}\times\sqrt[۳]{۶۰}}{\sqrt[۳]{۵}}=\frac{\sqrt[۳]{۱۸\times۶۰}}{\sqrt[۳]{۵}}=\sqrt[۳]{\frac{۱۸\times\cancel{۶۰}^{۱۲}}{\cancel{۵}_{۱}}}=\sqrt[۳]{۲۱۶}=۶$

BIAMOZ.com

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید. (۳ نمره)

الف) $\sqrt{۴^۳}$ ب) $-\sqrt[۳]{۲^۶}$ ج) $\sqrt[۳]{-۱۲۵}$

د) $\sqrt{\frac{۴}{۹}}$ هـ) $\sqrt{(۱-\sqrt{۵})^۲}$ و) $\sqrt{x^۲}$

۲- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (۱/۵)

الف) هر عددی دارای دو ریشه دوم است که قرینه یکدیگرند.

ب) ریشه سوم اعداد منفی، عددی منفی است.

ج) $\sqrt[۳]{a+b}=\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}$

۳- اگر $x>۰$ و $y<۰$ عبارت $\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}$ را ساده کنید. (۱)

۴- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. (۲)

الف) $\sqrt[۳]{-۲}\times\sqrt[۳]{۳۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۰/۴}}{\sqrt{۰/۱}}$

۵- عبارت‌های رادیکالی زیر را تا حد امکان ساده کنید. (۲)

الف) $\sqrt[۳]{۴۸}$ ب) $-\sqrt{۵۰}$

۱

الف) $\sqrt{۴^۳}=\sqrt{(۲^۲)^۳}=\sqrt{(۲^۳)^۲}=۲^۳=۸$ (۰/۵)

ب) $-\sqrt[۳]{۲^۶}=-\sqrt[۳]{(۲^۲)^۳}=-۲^۲=-۴$ (۰/۵)

ج) $\sqrt[۳]{-۱۲۵}=-۵$ (۰/۵)

د) $\sqrt{\frac{۴}{۹}}=\frac{۲}{۳}$ (۰/۵)

هـ) $\sqrt{(۱-\sqrt{۵})^۲}=|۱-\sqrt{۵}|=\sqrt{۵}-۱$ (۰/۵)

و) $\sqrt{x^۲}=|x|$ (۰/۵)

۲ الف) نادرست چون اعداد منفی ریشه دوم ندارند و عدد صفر نیز فقط یک ریشه دوم دارد. (۰/۵)

ب) درست (۰/۵)

ج) نادرست، مثلاً اگر $a=۱$ و $b=۸$ باشد داریم: (۰/۵)

$$\left.\begin{matrix}\sqrt[۳]{۱}=۱\\ \sqrt[۳]{۸}=۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sqrt[۳]{۱}+\sqrt[۳]{۸}=۳\neq\sqrt[۳]{۱+۸}=\sqrt[۳]{۹}$$

۳

$$\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=\underset{(۰/۵)}{|x|+|y|}\overset{x>۰,y<۰}{=\!=\!=}=x-y \quad (۰/۵)$$

۴

الف) $\sqrt[۳]{-۲}\times\sqrt[۳]{۳۲}=\sqrt[۳]{-۶۴}=-\sqrt[۳]{۶۴}=-۴$ (۱)

ب) $\frac{\sqrt{۰/۴}}{\sqrt{۰/۱}}=\sqrt{\frac{۰/۴}{۰/۱}}=\sqrt{۴}=۲$ (۱)

۵

الف) $\sqrt[۳]{۴۸}=\sqrt[۳]{۸\times۶}=\sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۳]{۶}=۲\sqrt[۳]{۶}$ (۱)

ب) $-\sqrt{۵۰}=-\sqrt{۲۵\times۲}=-\sqrt{۲۵}\times\sqrt{۲}=-۵\sqrt{۲}$ (۱)

BIAMOZ.com

۴ درس جمع و تفریق رادیکال‌ها

چکیده درس:

نکته ۲۱: اگر قسمت رادیکالی دو عبارت رادیکالی پس از ساده شدن کاملاً یکسان باشد (یعنی هم عدد زیر رادیکال و هم فرجه رادیکال آنها مانند هم باشد)، می‌توان آن دو عبارت رادیکالی را جمع و تفریق کرد.

$$\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}=-\sqrt{۳}$$
$$۴\sqrt[۳]{۳}-۲\sqrt[۳]{۳}=۲\sqrt[۳]{۳}$$
$$۲\sqrt{۳}+۵\sqrt{۳}=۷\sqrt{۳}$$

نکته ۲۲: برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی، ابتدا هر یک از رادیکال‌ها را به‌طور جداگانه ساده می‌کنیم. یعنی تا جایی که امکان دارد اعداد را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم، سپس رادیکال‌های متشابه را می‌یابیم و جمع و تفریق می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم عبارت $\sqrt{۱۸}-۳\sqrt{۱۲}-۲\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}$ را تا حد امکان ساده کنیم. ابتدا تک تک رادیکال‌ها را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۱۸}=\sqrt{۹\times۲}=۳\sqrt{۲}$$
$$\sqrt{۱۲}=\sqrt{۴\times۳}=۲\sqrt{۳}$$

حالا رادیکال‌های متشابه را با هم جمع می‌کنیم:

$$\sqrt{۱۸}-۳\sqrt{۱۲}-۲\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}=$$
$$۳\sqrt{۲}-۳\times۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}=$$
$$۳\sqrt{۲}-۶\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}=\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}$$

مثال: عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$۳\sqrt[۳]{۵۴}-۲\sqrt[۳]{۲}+۴\sqrt[۳]{۱۶}=۳\sqrt[۳]{۲۷\times۲}-۲\sqrt[۳]{۲}+۴\sqrt[۳]{۸\times۲}$$
$$=۳\times۳\sqrt[۳]{۲}-۲\sqrt[۳]{۲}+۴\times۲\sqrt[۳]{۲}=۹\sqrt[۳]{۲}-۲\sqrt[۳]{۲}+۸\sqrt[۳]{۲}$$
$$=۱۵\sqrt[۳]{۲}$$

نکته ۲۳: اگر مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم، اصطلاحاً می‌گوییم مخرج آن کسر را گویا کرده‌ایم. برای این کار کافی است صورت و مخرج آن کسر را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم به‌طوری‌که رادیکال مخرج حذف شود.

مثال: مخرج کسرهای $\frac{۲}{\sqrt{۲}}$ و $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$ و $\frac{۴}{\sqrt[۳]{۴}}$ را گویا کنید.

$$\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۴}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$
$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۸}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}$$
$$\frac{۴}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۴}{\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۴\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۴\sqrt[۳]{۲}}{۲}=۲\sqrt[۳]{۲}$$

نکته ۲۴: به‌طور کلی اگر مخرج یک کسر $\sqrt{a}$ باشد صورت و مخرج را در همان $\sqrt{a}$ ضرب می‌کنیم تا مخرج گویا شود، یعنی:

$$\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$$

نکته ۲۵: به طور کلی اگر مخرج یک کسر $\sqrt[۳]{a}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[۳]{a^۲}$ ضرب می‌کنیم تا مخرج گویا شود. یعنی:

$$\frac{b}{\sqrt[۳]{a}}=\frac{b}{\sqrt[۳]{a}}\times\frac{\sqrt[۳]{a^۲}}{\sqrt[۳]{a^۲}}=\frac{b\sqrt[۳]{a^۲}}{a}$$

مثال: مخرج هر یک از کسرهای زیر را گویا کنید:

الف) $\frac{۲}{\sqrt{\frac{۳}{۵}}}=\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۱۵}}{\sqrt{۹}}=\frac{۲\sqrt{۱۵}}{۳}$

ب) $\frac{۱}{۲\sqrt[۳]{۵}}=\frac{۱}{۲\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵^۲}}{\sqrt[۳]{۵^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۲۵}}{۲\sqrt[۳]{۵^۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۲۵}}{۲\times۵}=\frac{\sqrt[۳]{۲۵}}{۱۰}$

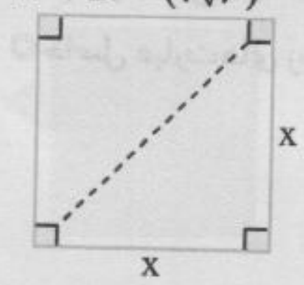
ج) $\sqrt[۳]{\frac{۲}{۹}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۹}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۳^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۶}}{\sqrt[۳]{۳^۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۶}}{۳}$

فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن $۲\sqrt{۶}$ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به‌دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.

حل: به کمک رابطه فیثاغورس **داریم:**

$$x^۲+x^۲=(۲\sqrt{۶})^۲$$



درنتیجه: $۲x^۲=۲۴$ **و از آن‌جا** $x^۲=۱۲$

بنابراین مساحت **این زمین ۱۲ متر مربع است.**

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که ضلع **مربع** $\sqrt{۱۲}$ **متر یا** $۲\sqrt{۳}$ **متر است.**

همچنین:

$$\text{محیط مربع}=۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}=۴\times۲\sqrt{۳}=۸\sqrt{۳}$$

BIAMOZ.com

کار در کلاس ۷۳

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

$\sqrt{۲}$	$\sqrt{xy}$	$۳\sqrt{a}$	$\frac{\sqrt{۵}}{۲}$	$\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۲}$	$۳\sqrt{۷}$
$\sqrt{۳}$	$۲\sqrt{x}$	$۲\sqrt{b}$	$۲\sqrt{۵}$	$\sqrt{۲}$	$-۴\sqrt{۵}$
$\sqrt{۵}$	$-۷\sqrt{x}$	$-\frac{۱}{۵}\sqrt{a}$	$-\frac{۲}{۳}\sqrt{۱۰}$	$۸\sqrt[۳]{۲}$	$۸\sqrt{۷}$
$۶\sqrt{۲}$	$۴\sqrt{xy}$	$-۷\sqrt{b}$	$-۲\sqrt{۱۰}$	$-۵\sqrt[۳]{۲}$	$۲\sqrt{۵}$
$۷\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$	$۵\sqrt{xy}-۵\sqrt{x}$	$\frac{۱۴}{۵}\sqrt{a}-۵\sqrt{b}$	$\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}-\frac{۸}{۳}\sqrt{۱۰}$	$\frac{۹}{۲}\sqrt[۳]{۲}+\sqrt{۲}$	$۱۱\sqrt{۷}-۲\sqrt{۵}$

فعالیت ۷۴

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

راه‌حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

ابتدا در هر عبارت، رادیکال‌ها را تک تک ساده می‌کنیم، سپس روابط به دست آمده را در عبارت جایگزین می‌کنیم و جواب را به دست می‌آوریم.

الف) $\sqrt{۷۲}-\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۸}$

ابتدا حاصل هر یک را از رادیکال‌ها را به‌دست می‌آوریم:
(جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{۷۲}=\sqrt{۶^۲\times ۲}=۶\sqrt{۲}$$
$$\sqrt{۳۲}=\sqrt{۴^۲\times ۲}=۴\sqrt{۲}$$
$$\sqrt{۱۸}=\sqrt{۳^۲\times ۲}=۳\sqrt{۲}$$

بنابراین:

$$\sqrt{۷۲}-\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۸}=۶\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

ب) $\sqrt{۵۰}+\sqrt[۳]{۲۴}+\sqrt[۳]{۸۱}=\sqrt{۵^۲\times ۲}+\sqrt[۳]{۲^۳\times ۳}+\sqrt[۳]{۳^۳\times ۳}$

$$=۵\sqrt{۲}+۲\sqrt[۳]{۳}+۳\sqrt[۳]{۳}=۵\sqrt{۲}+۵\sqrt[۳]{۳}$$

سؤال متن ۷۴

مثال۲: حاصل $\sqrt{۳}\div(\sqrt{۱۲}+\sqrt{۲۷}-\sqrt{۴۸})$ را به‌دست آورید.

$$\sqrt{۱۲}+\sqrt{۲۷}-\sqrt{۴۸}=۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر۱ است. (چرا؟) زیرا: حاصل تقسیم هر عدد غیر صفر بر خودش برابر یک است.

$$\sqrt{۳}\div\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۳}{۳}}=۱$$

کار در کلاس ۷۵

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید:

۱) $\sqrt{۹۸}-\sqrt{۵۰}+\sqrt{۱۲۸}=\sqrt{۷^۲\times ۲}-\sqrt{۵^۲\times ۲}+\sqrt{۸^۲\times ۲}$

$$=۷\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}+۸\sqrt{۲}=۱۰\sqrt{۲}$$

۲) $\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۲}-\sqrt{۷۵}+\sqrt{۴۸}=\sqrt{۳^۲\times ۳}-\sqrt{۲^۲\times ۳}-\sqrt{۵^۲\times ۳}+\sqrt{۴^۲\times ۳}$

$$=۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}-۵\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}=۰$$

BIAMOZ.com

۳) $۵\sqrt[۳]{۲}+۳\sqrt[۳]{۵۴}-۴\sqrt[۳]{۱۲۸}=۵\sqrt[۳]{۲}+۳\sqrt[۳]{۳^۳\times۲}-۴\sqrt[۳]{۴^۳\times۲}$

$=۵\sqrt[۳]{۲}+۹\sqrt[۳]{۲}-۱۶\sqrt[۳]{۲}=-۲\sqrt[۳]{۲}$

۴) $\sqrt{۴+\frac{۱}{۸۱}+\frac{۴}{۹}}=\sqrt{\frac{۴\times۸۱+۱+۴\times۹}{۸۱}}=\sqrt{\frac{۳۶۱}{۸۱}}=\frac{\sqrt{۳۶۱}}{\sqrt{۸۱}}=\frac{۱۹}{۹}$

۵) $(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(۳\sqrt{۲}-\sqrt{۳})=\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}+\sqrt{۳}\times۳\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}$

$=۶-\sqrt{۶}+۳\sqrt{۶}-۳=۳+۲\sqrt{۶}$

گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی

فعالیت ۷۵

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است حل را کامل کنید.

الف) $\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$

ب) $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵^۲}}{\sqrt[۳]{۵^۲}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۲۵}}{۵}$

ج) $\frac{۴}{\sqrt{\frac{۲}{۳}}}=\frac{۴}{\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۴\sqrt{۶}}{۲}=۲\sqrt{۶}$

د) $\frac{۲\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۳]{۲^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۱۴}}{۲}=\sqrt[۳]{۱۴}$

هـ) $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{۲x}}{x}=$ $(x>۰)$

و) $\frac{۵}{\sqrt[۳]{z^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{z}}{\sqrt[۳]{z}}=\frac{۵\sqrt[۳]{z}}{z}$ $(z\neq۰)$

کافی است صورت و مخرج کسر داده شده را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا عدد رادیکالی مخرج، از حالت رادیکالی خارج شود.

کار در کلاس ۷۶

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۶}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۶}{\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۲^۲}}=\frac{۶\times\sqrt[۳]{۴}}{۲}=۳\sqrt[۳]{۴}$

ب) $\frac{۲}{\sqrt{۳۲}}=\frac{۲}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۲}{۴\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴\times۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

ج) $\frac{۱۲}{\sqrt{۶}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۶}}\times\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۶}}=\frac{۱۲\sqrt{۶}}{۶}=۲\sqrt{۶}$

د) $\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳x}}=\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳x}}\times\frac{\sqrt[۳]{(۳x)^۲}}{\sqrt[۳]{(۳x)^۲}}=\frac{۵\sqrt[۳]{۹x^۲}}{۳x}$ $(x\neq۰)$

BIAMOZ.com

تمرین

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $۲\sqrt{۵۰}+\sqrt{۳۲}+۲\sqrt{۷۲}=۲\sqrt{۲۵\times۲}+\sqrt{۱۶\times۲}+۲\sqrt{۳۶\times۲}=۱۰\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}+۱۲\sqrt{۲}=۲۶\sqrt{۲}$

ب) $\sqrt{۸}+\sqrt{۱۲۸}-\sqrt{۵۰}=\sqrt{۴\times۲}+\sqrt{۶۴\times۲}-\sqrt{۲۵\times۲}=۲\sqrt{۲}+۸\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$

ج) $\sqrt[۳]{۲۷^{۲}}=\sqrt[۳]{(۳^{۳})^{۲}}=\sqrt[۳]{(۳^{۲})^{۳}}=۳^{۲}=۹$

د) $\sqrt[۳]{\frac{-۲۷}{۶۴}}=\frac{-\sqrt[۳]{۳^{۳}}}{\sqrt[۳]{۴^{۳}}}=-\frac{۳}{۴}$

هـ) $(\sqrt{۲}-\sqrt{۵})(\sqrt{۱۰}+\sqrt{۲})=\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۰}+\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}-\sqrt{۵}\times\sqrt{۱۰}-\sqrt{۵}\times\sqrt{۲}$

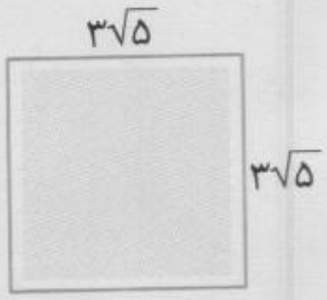
$=\sqrt{۲۰}+۲-\sqrt{۵۰}-\sqrt{۱۰}=۲\sqrt{۵}+۲-۵\sqrt{۲}-\sqrt{۱۰}$

و) $۲\sqrt{۴۸}-۳\sqrt{۲۷}=۲\sqrt{۱۶\times۳}-۳\sqrt{۹\times۳}=۸\sqrt{۳}-۹\sqrt{۳}=-\sqrt{۳}$

۲- اگر $x<۰$ باشد حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$۲\sqrt{x^{۲}}-x=۲|x|-x\overset{x<۰}{=\!=}۲(-x)-x=-۲x-x=-۳x$$

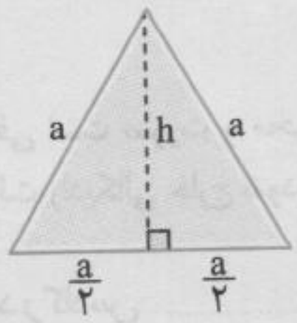
۳- محیط و مساحت مربعی به طول $۳\sqrt{۵}$ سانتی‌متر را به‌دست آورید.



مساحت $=۳\sqrt{۵}\times۳\sqrt{۵}=۹\times۵=۴۵$ سانتی متر مربع

محیط $=۳\sqrt{۵}+۳\sqrt{۵}+۳\sqrt{۵}+۳\sqrt{۵}=۱۲\sqrt{۵}$ سانتی متر

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ضلع a نشان می‌دهد. اندازه ارتفاع h را بر حسب a به‌دست آورید؛ سپس مساحت آن را بر حسب a بنویسید. طبق رابطه فیثاغورس داریم:



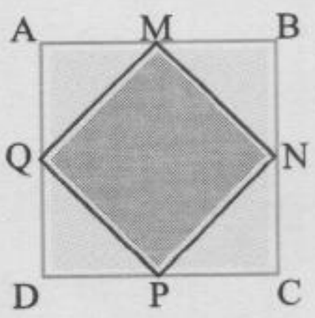
$$h^{۲}+(\frac{a}{۲})^{۲}=a^{۲}$$

$$\Rightarrow a^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}=h^{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۴}a^{۲}=h^{۲}\Rightarrow h=\sqrt{\frac{۳}{۴}a^{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\times a=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

۵- نقاط M ، N ، P و Q وسط‌های اضلاع مربع ABCD هستند. اگر مساحت مربع ABCD، ۱۰۰ مترمربع باشد، محیط مربع MNPQ چقدر است؟



روش ۱: ابتدا طول ضلع مربع ABCD را می‌یابیم: $\sqrt{۱۰۰}=۱۰$

بنابراین $MB=BN=۵$، حال طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$MN^{۲}=۵^{۲}+۵^{۲}=۲۵+۲۵=۵۰\Rightarrow MN=\sqrt{۵۰}$$

$\Rightarrow$ مساحت MNPQ $=(\sqrt{۵۰})^{۲}=۵۰$ متر مربع

روش ۲: ابتدا ضلع مربع ABCD را می‌یابیم: $\sqrt{۱۰۰}=۱۰$

طول ضلع به‌دست آمده همان طول قطر مربع (لوزی) MNPQ است. حال طبق فرمول مساحت لوزی داریم:

$$\text{مساحت لوزی}=\frac{۱۰\times۱۰}{۲}=۵۰$$

BIAMOZ.com

۶- در جاهای خالی علامت > یا = یا < بگذارید:

$\sqrt{۵}+\sqrt{۴} \boxed{>} \sqrt{۵+۴}=\sqrt{۹}=۳$ $\quad$ $۴ \boxed{>} \sqrt{۳^۲+۲^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$

$\sqrt{\frac{۳}{۱۱}} \boxed{=} \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۱}}$ $\quad$ $۵=\sqrt{۲۵}=\sqrt{۳^۲+۴^۲} \boxed{=} ۵$

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید:

الف) $\sqrt{\boxed{۱۰۰}}=۱۰$ $\quad$ ب) $۲\sqrt{\boxed{۹}}=۶$ $\quad$ ج) $\sqrt{\frac{۱}{\boxed{۹}}}=\frac{۱}{۳}$ $\quad$ د) $\sqrt[\boxed{۳}]{۸}=۲$

هـ) $\frac{۲^{-۵}}{۲^{\boxed{-۸}}}=\sqrt{۶۴}=۸=۲^۳$ $\quad$ و) $\frac{(\sqrt{۱۲})^۲}{۴\times ۳^۲}=۳^{\boxed{-۱}}$ $\quad$ ز) $\frac{m^۶\times m^{-۲}}{m^{\boxed{۳}}}=m$ $\quad$ ح) $\sqrt[۳]{-۲۷}=\frac{\boxed{۱۲}^۳}{(-۴)^۳}$

$\sqrt[۳]{-۲۷}=۹(-۳)=(-۳)^۳$

۸- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲\times ۳}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$

ب) $\frac{۲}{\sqrt[۳]{a^۲}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{a^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{a}}=\frac{۲\sqrt[۳]{a}}{a}$

ج) $\frac{۲}{\sqrt{۷}}=\frac{۲}{\sqrt{۷}}\times\frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۷}}=\frac{۲\sqrt{۷}}{۷}$

۹- آیا تساوی $\sqrt{x^۲}=(\sqrt{x})^۲$ همیشه درست است؟ توضیح دهید.

الف) تساوی همیشه درست است. نادرست، اعداد منفی را نمی‌توان به جای x قرار داد.

ب) تساوی همیشه نادرست است. نادرست، اعداد نامنفی را می‌توان به جای x قرار داد.

ج) اگر $x\geq ۰$ تساوی درست است. درست است.

ارزشیابی مستمر

۱- جای خالی را با عدد مناسب پر کنید. (۲نمره)

الف) $\sqrt{\square}=۱۳$ $\quad$ ب) $۳\sqrt{\square}=۶$ $\quad$ ج) $\frac{\sqrt[۳]{\square}}{۳}=۱$ $\quad$ د) $\frac{۳^۷}{۳^۲}=\sqrt[۳]{\square}$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. (۴)

الف) $\sqrt{۱۲}+۳\sqrt{۸}+۲\sqrt{۱۸}-\sqrt{۳}$ $\quad$ ب) $۳\sqrt[۳]{۲۴}-۲\sqrt[۳]{۵۴}-۲\sqrt[۳]{۳}$

ج) $\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۲}-\sqrt{۷۵}+\sqrt{۴۸}$ $\quad$ د) $\sqrt{۵+\frac{۱}{۶۴}+\frac{۱}{۸}}$

۳- اگر $x<۰$ حاصل عبارت $۲\sqrt{x^۲}-۳x$ را بیابید. (۲)

۴- مخرج عبارت‌های زیر را گویا کنید. (۱)

الف) $\sqrt{\frac{۳}{۵}}$ $\quad$ ب) $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}$

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱

الف) $\sqrt{\square}=۱۳\Rightarrow\square=۱۳^۲=۱۶۹$ (۰/۵)

ب) $۳\sqrt{\square}=۶\Rightarrow\sqrt{\square}=۲\Rightarrow\square=۴$ (۰/۵)

ج) $\frac{\sqrt[۳]{\square}}{۳}=۱\Rightarrow\sqrt[۳]{\square}=۳\Rightarrow\square=۲۷$ (۰/۵)

د) $\frac{۳^۷}{۳^۲}=\sqrt[۳]{\square}\Rightarrow ۳^۵=\sqrt[۳]{\square}\Rightarrow\square=(۳^۵)^۳=۳^{۱۵}$ (۰/۵)

BIAMOZ.com

۲

الف) $\sqrt{۱۲}+۳\sqrt{۸}+۲\sqrt{۱۸}-\sqrt{۳}=\sqrt{۴\times۳}+۳\sqrt{۴\times۲}+۲\sqrt{۹\times۲}-\sqrt{۳}$

$=۲\sqrt{۳}+۶\sqrt{۲}+۶\sqrt{۲}-\sqrt{۳}=\sqrt{۳}+۱۲\sqrt{۲}$ (۱)

ب) $۳\sqrt[۳]{۲۴}-۲\sqrt[۳]{۵۴}-۲\sqrt[۳]{۳}=۳\sqrt[۳]{۳\times۸}-۲\sqrt[۳]{۲۷\times۲}-۲\sqrt[۳]{۳}=۶\sqrt[۳]{۳}-۶\sqrt[۳]{۲}-۲\sqrt[۳]{۳}=۴\sqrt[۳]{۳}-۶\sqrt[۳]{۲}$ (۱)

ج) $\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۲}-\sqrt{۷۵}+\sqrt{۴۸}=\sqrt{۹\times۳}-\sqrt{۴\times۳}-\sqrt{۲۵\times۳}+\sqrt{۱۶\times۳}$

$=۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}-۵\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}=۰$ (۱)

د) $\sqrt{۲+\frac{۱}{۶۴}+\frac{۵}{۸}}=\sqrt{\frac{۱۲۸+۱+۴۰}{۶۴}}=\sqrt{\frac{۱۶۹}{۶۴}}=\frac{۱۳}{۸}$ (۱)

۳

$۲\sqrt{x^۲}-۳x=۲|x|-۳x \overset{x<۰}{=\!=\!=} -۲x-۳x=-۵x$

(۱) (۰/۵) (۰/۵)

۴

الف) $\sqrt{\frac{۳}{۵}}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۵}$ (۰/۵)

ب) $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۳\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۳\sqrt[۳]{۴}}{۲}$ (۰/۵)

(دورهٔ اوّل متوسطه)

آزمون تلفیقی

مبحث: فصل ۴ — مدت: ... دقیقه — تاریخ: ../../..

۱- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. ۱

الف) با معکوس کردن پایه یک عدد توان‌دار، توان آن ..... می‌شود.

ب) اگر یک عدد اعشاری را بر ۱۰۰۰ تقسیم کنیم، ممیز آن ..... رقم به عقب برمی‌گردد.

ج) اگر x عددی منفی باشد، حاصل $\sqrt{x^۲}$ برابر با ..... است.

د) اگر مساحت کل یک مکعب ۱۵۰ باشد، حجم آن ..... است.

۲- در جای خالی علامت (> = <) قرار دهید. ۱

الف) $۲^{-۲}\square۲^{-۱}$ ب) $-۵^{-۲}\square(-۵)^{-۲}$

ج) $۱\square(\frac{-۸}{۱۵})^{۰}$ د) $۰\square۳^{-۱}$

۳- عددهای زیر را با توان منفی بنویسید. ۰/۵

الف) $(۰/۲۵)^{۴}$ ب) $\frac{۱}{۳۷}$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید. ۱

الف) $(\frac{۲}{۵})^{-۲}+(\frac{۵}{۳})^{-۲}$ ب) $[-(-\frac{۱}{۲})^{-۳}]^{-۲}$

۵- حاصل عبارت $\frac{۳^{-۵}\times۱۰^{-۵}\times۴}{۴^{-۵}\times۱۵^{-۵}}$ **را بیابید.** ۱

۶- عددهای B و A را با نماد علمی بنویسید و عددهای D و C را به صورت اعشاری برگردانید. ۱

$A=۰/۰۰۰۳۱۵$ $B=۲۸۰۰۰۰۰$ $C=۳/۱\times۱۰^{-۳}$ $D=۳\times۱۰^{۷}$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. ۲

الف) $\sqrt{(۲-\sqrt{۵})^۲}$ ب) $\sqrt[۳]{-۲}\times\sqrt[۳]{۴}$

ج) $\frac{\sqrt[۳]{۸۱}}{\sqrt[۳]{-۳}}$ د) $\frac{\sqrt{۸}\times\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}}$

BIAMOZ.com

۸- حاصل عبارت زیر را بیابید. ۱

$$\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۲}-\sqrt{۷۵}+\sqrt{۴۸}$$

۹- مخرج کسر $\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳x}}$ را گویا کنید. ۱

پاسخ سؤالات امتحانی

۱ الف) قرینه ب) سه ج) $|x|$ د) ۱۲۵ (هر قسمت ۰/۲۵)

۲ (هر قسمت ۰/۲۵)

الف) $۲^{-۱} \boxed{>} ۲^{-۲}$ ب) $-۵^{-۲} \boxed{<} (-۵)^{-۲}$ ج) $(\frac{-۸}{۱۵})^{۰} \boxed{=} ۱$ د) $۳^{-۱} \boxed{>} ۰$

۳

الف) $(۰/۲۵)^{۴} = (\frac{۱۰۰}{۲۵})^{-۴} = ۴^{-۴}$ (۰/۲۵)

ب) $\frac{۱}{۳^{۷}} = ۳^{-۷}$ (۰/۲۵)

۴

الف) $(\frac{۲}{۵})^{-۲} + (\frac{۵}{۳})^{-۲} = (\frac{۵}{۲})^{۲} + (\frac{۳}{۵})^{۲} = \frac{۲۵}{۴} + \frac{۹}{۲۵} = \frac{۶۲۵+۳۶}{۱۰۰} = \frac{۶۶۱}{۱۰۰} = ۶/۶۱$ (۰/۵)

ب) $[-(-\frac{۱}{۲})^{-۳}]^{-۲} = [(-\frac{۱}{۲})^{-۳}]^{-۲} = (-\frac{۱}{۲})^{+۶} = \frac{۱}{۶۴}$ (۰/۵)

۵ $\frac{۳^{-۵} \times ۱۰^{-۵} \times ۴}{۴^{-۵} \times ۱۵^{-۵}} = \frac{۳۰^{-۵} \times ۴}{۶۰^{-۵}} = (\frac{۳۰}{۶۰})^{-۵} \times ۴ = (\frac{۱}{۲})^{-۵} \times ۴ = ۲^{۵} \times ۲^{۲} = ۲^{۷}$ (۰/۵)

(۰/۵)

۶

$A = ۰/۰۰۰۳۱۵ = ۳/۱۵ \times ۱۰^{-۴}$ (۰/۲۵)

$B = ۲۸۰۰۰۰۰ = ۲/۸ \times ۱۰^{۶}$ (۰/۲۵)

$C = ۳/۱ \times ۱۰^{-۳} = ۰/۰۰۳۱$ (۰/۲۵)

$D = ۳ \times ۱۰^{۷} = ۳۰۰۰۰۰۰۰$ (۰/۲۵)

۷

الف) $\sqrt{(۲-\sqrt{۵})^{۲}} = |۲-\sqrt{۵}| = -\sqrt{۵}-۲$ (۰/۵)

ب) $\sqrt[۳]{-۲} \times \sqrt[۳]{۴} = \sqrt[۳]{-۸} = -۲$ (۰/۵)

ج) $\frac{\sqrt[۳]{۸۱}}{\sqrt[۳]{-۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۸۱}{-۳}} = \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$ (۰/۵)

د) $\frac{\sqrt{۸} \times \sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۲\cancel{\sqrt{۲}} \times \cancel{\sqrt{۵}}}{\cancel{\sqrt{۲}} \times \cancel{\sqrt{۵}}} = ۲$ (۰/۵)

۸ $\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۲}-\sqrt{۷۵}+\sqrt{۴۸} = ۳\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳} - ۵\sqrt{۳} + ۴\sqrt{۳} = ۰$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۹

$\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳x}} = \frac{۵}{\sqrt[۳]{۳x}} \times \frac{\sqrt[۳]{(۳x)^{۲}}}{\sqrt[۳]{(۳x)^{۲}}} = \frac{۵\sqrt[۳]{۹x^{۲}}}{۳x}$ (۰/۵)

(۰/۵)

دانش آموزان عزیز برای مطالعه آزمون پایانی دی‌ماه به انتهای کتاب مراجعه نمایید.

BIAMOZ.com

فصل ۵ عبارت‌های جبری

درس ۱ عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

چکیده درس:

نکته۱: به حاصل‌ضرب اعداد حقیقی در چند متغیر، یک‌جمله‌ای گفته می‌شود. هر یک‌جمله‌ای از دو بخش تشکیل شده است. یکی ضریب عددی و دیگری عبارت حرفی. برای مثال در یک‌جمله‌ای $\frac{۲}{۳}x^۲y$، عدد $\frac{۲}{۳}$ را ضریب می‌گویند و $x^۲y$ قسمت حرفی آن است.

نکته۲: در یک جمله‌ای‌ها توان متغیرها باید عددی طبیعی باشد. همچنین متغیرها نباید زیر رادیکال یا با توان مثبت در مخرج قرار داشته باشند یا دارای قدر مطلق باشند.

مثال: عبارت‌های $۲x, -۳xy, \sqrt{۲}x^۲y, \frac{xy}{۳}$ همگی یک جمله‌ای هستند.

مثال: عبارت‌های $\sqrt{x}, \frac{۲}{x}, ۲^x, ۲x^{-۳}, ۳|x|$ یک جمله‌ای نیستند.

نکته۳: هرگاه در دو یک جمله‌ای، قسمت حرفی آن‌ها یکسان باشد، می‌گوییم این یک‌جمله‌ای‌ها متشابه هستند. مثلاً دو یک جمله‌ای $۳x^۲y, -۲x^۲y$ متشابه هستند.

مثال: دو یک جمله‌ای $-x^۲y^۲$ و $۲x^۳y^۲$ متشابه نیستند. زیرا در قسمت حرفی آن‌ها توان xها یکسان نیست.

نکته۴: در یک جمله‌ای‌ها توان هر متغیر را درجه آن یک جمله‌ای نسبت به آن متغیر می‌گوییم. مثلاً در یک‌جمله‌ای $۳x^۲y^۳$ درجه نسبت به x برابر ۲ و درجه نسبت به y برابر ۳ است. همچنین درجه یک‌جمله‌ای نسبت به تمام متغیرهایش از جمع کردن توان‌های تمام متغیرها حاصل می‌شود. مثلاً در یک‌جمله‌ای $۳x^۲y^۳$ درجه نسبت به تمام متغیرها ۵ است. زیرا $۵ = ۳ + ۲$.

نکته۵: برای ضرب دو یک‌جمله‌ای، ضریب‌های عددی آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و قسمت حرفی آن‌ها را نیز با استفاده از قواعد اعداد توان‌دار در هم ضرب می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم یک جمله‌ای‌های $\frac{۳}{۲}xz, -۲xy^۲$ را در هم ضرب کنیم:

$$(-۲xy^۲)\times(\frac{۳}{۲}xz) = (-۲\times\frac{۳}{۲})(xy^۲xz) = -۳x^۲y^۲z$$

نکته۶: هرگاه چند یک جمله‌ای غیرمتشابه را جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، یک چند جمله‌ای به دست می‌آید. توجه کنید که یک جمله‌ای‌ها خود چند جمله‌ای به شمار می‌روند.

مثال: عبارت $-۲xy - ۳x^۲ + \frac{۱}{۲}x$ یک سه جمله‌ای است.

نکته۷: درجه یک چند جمله‌ای نسبت به یک متغیر برابر است با بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر در آن عبارت. همچنین درجه نسبت به چند متغیر در یک چند جمله‌ای برابر است با بزرگ‌ترین درجه‌ی یک جمله‌ای‌های آن نسبت به متغیرهای مورد نظر.

مثال: در عبارت $۳xy^۳ - ۲xy - ۴x^۲$ درجه نسبت به متغیر x برابر ۲ و درجه نسبت به y برابر ۳ است و درجه نسبت به x و y برابر با $۳+۱$ یعنی ۴ است.

نکته۸: هرگاه در یک چندجمله‌ای جملات را نسبت به یک متغیر از توان بیشتر به توان کمتر (از چپ به راست) مرتب کنیم، می‌گوییم آن چندجمله‌ای را برحسب آن متغیر به صورت استاندارد نوشته‌ایم.

مثال: اگر عبارت $۲x^۲y - ۳x^۳ - ۲x$ را برحسب x استاندارد کنیم، به صورت $-۳x^۳ + ۲x^۲y - ۲x$ درمی‌آید.

نکته۹: برای ضرب دو چند جمله‌ای، تک‌تک جمله‌های عبارت اول را باید در تک‌تک جمله‌های عبارت دوم ضرب کنیم و در آخر عبارت را ساده کنیم.

$$(x^۲-۲)(x^۴+۲x^۲+۴) =$$

$$x^۶ + ۲x^۴ + ۴x^۲ - ۲x^۴ - ۴x^۲ - ۸ = x^۶ - ۸$$

نکته۱۰: هر تساوی جبری را که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان، برقرار باشد، یک اتحاد جبری نامیده می‌شود.

مثال: عبارت $۲x - ۳ = -x + ۱$ یک معادله است ولی یک اتحاد نیست زیرا این تساوی برای $x = ۱$ برقرار نیست.

مثال: عبارت $x + x = ۲x$ یک اتحاد است زیرا به ازای هر مقداری تساوی برقرار است.

نکته۱۱: اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت زیر است:

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

مثال: به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای حاصل عبارت‌های زیر را بیابید:

$$(۲x-y)^۲ = (۲x)^۲ - ۲(۲x)(y) + y^۲$$

$$= ۴x^۲ - ۴xy + y^۲$$

$$(x^۲+۲y^۳)^۲ = (x^۲)^۲ + ۲(x^۲)(۲y^۳) + (۲y^۳)^۲ =$$

$$x^۴ + ۴x^۲y^۳ + ۴y^۶$$

نکته۱۲: هرگاه بتوانیم یک عبارت را به صورت ضرب چند عبارت دیگر بنویسیم، می‌گوییم آن عبارت را تجزیه کرده‌ایم. یکی از روش‌های تجزیه فاکتورگیری است.

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $۲x^۲y - ۴xy^۲ = ۲xy(x-۲y)$

ب) $۶x^۲ab - ۲x + ۴x^۲ = ۲x(۳xab - ۱ + ۲x)$

BIAMOZ.com

نکته ۱۳: یکی دیگر از روش‌های تجزیه استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای است. برای این کار ابتدا جملات عبارت داده شده را با صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای مقایسه می‌کنیم (یعنی a و b را مشخص می‌کنیم) سپس عبارت داده شده را به شکل $(a+b)^2$ یا $(a-b)^2$ می‌نویسیم.

مثال: تجزیه کنید.

الف) $x^2-4x+4=x^2-2\times(2x)+2^2=$

$(x-2)^2=(x-2)(x-2)$

ب) $n^4+10n^2+25=(n^2)^2+2\times5\times n^2+5^2$

$(n^2+5)^2=(n^2+5)(n^2+5)$

ج) $25x^4+30x^3+9x^2=x^2(25x^2+30x+9)=$

$=x^2((5x)^2+2\times(5x)(3)+3^2)$

$=x^2(5x+3)^2=x^2(5x+3)(5x+3)$

فعالیت

۱- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید:

۱) $2(-4x\times7x^2)=2(-28x^3)=-56x^3$

۲) $(\frac{2}{3}x^2y)^3=(\frac{2}{3})^3.(x^2)^3.y^3=\frac{8}{27}x^6y^3$

۳) $(-3x^3)^2(\frac{1}{3}x^2)^3=(-3)^2.(x^3)^2.(\frac{1}{3})^3.(x^2)^3=9.\frac{1}{27}.x^6.x^6=\frac{1}{3}x^{12}$

۴) $(\frac{1}{2}a^2b)(ab)(\frac{-2}{7}a^2c^5)=\frac{1}{2}(-\frac{2}{7}).a^2.a.a^2.b.b.c^5=-\frac{1}{7}a^5b^2c^5$

۵) $2(5xy^4)^2(-2x^5y^2)=2.5^2.x^2.(y^4)^2.(-2x^5y^2)$

$=(2)(25)(-2)(x^2.x^5).(y^8.y^2)=-100x^7y^{10}$

۶) $(2x^2y)(3x^2y^3)+xy^3(-5x^3y)=6x^4y^4-5x^4y^4=x^4y^4$

۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

یک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y
$\sqrt{3}a^3x^2y^4$	a,x,y	۲	۴	$2+4=6$
$5x^2y^2z^4$	x,y,z	۲	۲	$2+2=4$
$-12x^3u$	x و u	۳	صفر	۳
$\frac{3}{5}$	-	صفر	صفر	صفر

۳- چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید:

الف) $3x^2+5-2x+2x^3=2x^3+3x^2-2x+5$

ب) $-3bxy^3+ax^2y-4bx^3y^2=-4bx^3y^2+ax^2y-3bxy^3$

ج) $\frac{1}{2}x^2y^2-2xy^3+3x^3y-4=3x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2-2xy^3-4$

کار در کلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $-5a^2-3ax+x^2-[4a^2+5ax-(3a^2-8ax)]=\underline{-5a^2}-\underline{\underline{3ax}}+x^2-\underline{4a^2}-\underline{\underline{5ax}}+\underline{3a^2}-\underline{\underline{8ax}}$ ($-3a^2+8ax$)

$=x^2-16ax-6a^2$

ب) $(4x+5x^2)(x^3-x+1)=4x^4-\underline{\underline{4x^2}}+4x+5x^5-5x^3+\underline{\underline{5x^2}}=5x^5+4x^4-5x^3+x^2+4x$

ج) $(x+x^2)(x^4+x^2+1)=x^5+x^3+x+x^6+x^4+x^2=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x$

BIAMOZ.com

د) $(x^2-2x+1)(x^2+x^3-2) = (x^2)(x^2)+(x^2)(x^3)+(x^2)(-2)$

$+(-2x)(x^2)+(-2x)(x^3)+(-2x)(-2)+x^2+x^3-2 = \underline{x^4}+x^5\underline{\underline{-2x^2}}-\underline{\underline{2x^3}}-\underline{2x^4}+4x+\underline{x^2}+\underline{\underline{x^3}}-2$

$= x^5-x^4-x^3-x^2+4x-2$

فعالیت

۱- به ازای مقادیر داده شده برای x، جدول زیر را کامل کنید:

x	x^2	$6x$	x^2+6x+9	$(x+3)^2$
-۲	۴	-۱۲	۱	۱
۰	۰	۰	۹	۹
۵	۲۵	۳۰	۶۴	۶۴
$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۹}{۴}$	۹	$\frac{۸۱}{۴}$	$\frac{۸۱}{۴}$

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟ مقادیر هر دو ستون برابرند.

حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید.

x	x^2	$6x$	x^2+6x+9	$(x+3)^2$
-۱	۱	-۶	۴	۴
۲	۴	۱۲	۲۵	۲۵
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	۳	$\frac{۴۹}{۴}$	$\frac{۴۹}{۴}$

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

حدس می‌زنیم به ازای هر عدد حقیقی دیگری که محاسبات را انجام دهیم، حاصل دو ستون آخر با هم برابر شود.

حاصل عبارت جبری $(x+3)^2$ را به دست آورید و آن را با عبارت جبری x^2+6x+9 مقایسه کنید.

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2+3x+3x+9 = x^2+6x+9$

حاصل عبارت $(x+3)^2$ باعبارت x^2+6x+9 برابر است.

بنابراین برابری $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ یک اتحاد است.

برابری $3x-3 = x+1$ را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای $x=2$ ، به دست آورید.

$3\times2-3 = 2+1 \Rightarrow 3=3$

آیا این برابری یک اتحاد است؟ خیر، زیرا به ازای هر مقدار دیگر مطمئن نیستیم تساوی برقرار باشد.

برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای x بررسی کنید.

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-3 = 3\times0-3 = -3 \\ x+1 = 0+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow -3 \neq 1$$

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} 3x-3 = 3\times1-3 = 0 \\ x+1 = 1+1 = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \neq 2$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $(a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2+4a+4a+16 = a^2+8a+16$

ب) $(5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2) = 25x^2+10x+10x+4 = 25x^2+20x+4$

ج) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$

BIAMOZ.com

۳- با دقت در برابری $(۵x+۲)^۲ = ۲۵x^۲ + ۲۰x + ۴$، که در فعالیت ۲ به دست آمده است به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

- جمله اول سمت راست برابری یعنی $۲۵x^۲$ چه رابطه‌ای با $۵x$ دارد؟ $۲۵x^۲$ مربع $۵x$ (توان دوم $۵x$) است.
- جمله دوم سمت راست برابری یعنی $۲۰x$ چه رابطه‌ای با ۲ و $۵x$ دارد؟ $۲۰x$ از دو برابر کردن حاصل‌ضرب ۲ و $۵x$ به دست می‌آید.
- جمله سوم سمت راست برابری یعنی ۴ چه رابطه‌ای با ۲ دارد؟ ۴ مربع عدد ۲ است. (توان دوم عدد ۲ است.)

عبارت جبری $۵x+۲$ دوجمله‌ای و $(۵x+۲)^۲$ را مربع دوجمله‌ای می‌نامیم و برای سرعت بخشیدن به عملیات جبری می‌توان مربع دوجمله‌ای را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

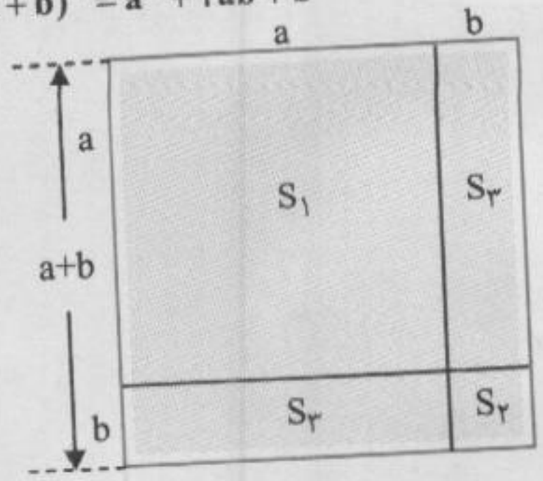
$$(۵x+۲)^۲ = (۵x)^۲ + ۲\times۵x\times۲ + ۲^۲$$

$(۵x)^۲$: مربع جملهٔ اول — $۲\times۵x\times۲$: دوبرابر حاصل‌ضرب دو جمله — $۲^۲$: مربع جملهٔ دوم

$(۵x+۲)^۲$: $۵x$ جملهٔ اول، ۲ جملهٔ دوم

برای هر دو عدد مثبت a و b، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد مقابل را نشان دهید.

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$



مساحت کل شکل $= (a+b)^۲ = s_۱ + ۲s_۳ + s_۲$

۴- مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $(۵x-۲)^۲ = (۵x-۲)(۵x-۲) = ۲۵x^۲ - ۱۰x - ۱۰x + ۴ = ۲۵x^۲ - ۲۰x + ۴$

ب) $(۳x-۵x)^۲ = ۹x^۲ - ۱۵x^۲ - ۱۵x^۲ + ۲۵x^۲ = ۹x^۲ - ۳۰x^۲ + ۲۵x^۲ = ۴x^۲$

ج) $(a-b)^۲ = a^۲ - ab - ab + b^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$

ارتباط بین جملات به دست آمده در طرف راست تساوی‌های بالا و جملات عبارت داده شده در سمت چپ آنها را بیان کنید. عبارت سمت راست برابر است با مربع جملهٔ اول در پرانتز سمت چپ منهای دوبرابر حاصل‌ضرب دوجمله‌ی داخل پرانتز سمت چپ به اضافه مربع جمله دوم داخل پرانتز سمت چپ تساوی.

کار در کلاس

۸۳

۱- مربع دو جمله‌ای‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

الف) $(۲x+۱)^۲ = (۲x)^۲ + ۲.(۲x).۱ + ۱^۲ = ۴x^۲ + ۴x + ۱$

ب) $(۴a+۳b)^۲ = (۴a)^۲ + ۲.(۴a)(۳b) + (۳b)^۲ = ۱۶a^۲ + ۲۴ab + ۹b^۲$

ج) $(x^۲ - \frac{۱}{۲})^۲ = (x^۲)^۲ - ۲.(x^۲).(\frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲})^۲ = x^۴ - x^۲ + \frac{۱}{۴}$

د) $(۲xy - \frac{۱}{۲}x^۳)^۲ = (۲xy)^۲ - ۲(۲xy)(\frac{۱}{۲}x^۳) + (\frac{۱}{۲}x^۳)^۲ = ۴x^۲y^۲ - ۲x^۴y + \frac{۱}{۴}x^۶$

هـ) $(\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۳})^۲ = (\sqrt{۲})^۲ + ۲(\sqrt{۲})(۳\sqrt{۳}) + (۳\sqrt{۳})^۲ = ۲ + ۶\sqrt{۶} + ۲۷ = ۲۹ + ۶\sqrt{۶}$

و) $(۵ - ۲\sqrt{۲})^۲ = ۵^۲ - ۲(۵)(۲\sqrt{۲}) + (۲\sqrt{۲})^۲ = ۲۵ - ۲۰\sqrt{۲} + ۸ = ۳۳ - ۲۰\sqrt{۲}$

BIAMOZ.com

۲- جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

الف) $(\underbrace{۲a}_{\text{جملهٔ اول}}+\underbrace{۳b^۲}_{\text{جملهٔ دوم}})^۲=\underbrace{۴a^۲}_{\text{مربع جملهٔ اول}}+\underbrace{۱۲ab^۲}_{\text{دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها}}+\underbrace{۹b^۴}_{\text{مربع جملهٔ دوم}}$

جمله اول $=۲a$ **مربع جمله اول** $=۴a^۲=(۲a)^۲ \Rightarrow$

دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها $=۲(۲a)(۳b^۲)=۱۲ab^۲$

درنتیجه داریم:

$(۲a+۳b^۲)^۲=۴a^۲+۱۲ab^۲+۹b^۴$

الف) $(۱+b)^۲=۱+۲b+b^۲ \Rightarrow$

دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها $=۲(۱)b=۲b$

ب) $(xy-\frac{۱}{۲})^۲=x^۲y^۲-xy+\frac{۱}{۴}$

مربع جمله اول $=(xy)^۲=x^۲y^۲$

دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها $=۲(xy)(\frac{۱}{۲})=xy$

ج) $(x^۲-\frac{۱}{x^۲})^۲=x^۴-۲+\frac{۱}{x^۴}(x\neq ۰)$

مربع جمله اول $=x^۴=(x^۲)^۲ \Rightarrow$ جمله اول $=x^۲$

مربع جمله دوم $=\frac{۱}{x^۴}=(\frac{۱}{x^۲})^۲ \Rightarrow$ جمله دوم $=\frac{۱}{x^۲}$

دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها $=۲(x^۲)(\frac{۱}{x^۲})=۲$

د) $(۶x-y)^۲=۳۶x^۲-۱۲xy+y^۲$

مربع جمله اول $=۳۶x^۲=(۶x)^۲ \Rightarrow$ جمله اول $=۶x$

دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها $=۱۲xy=۲(۶x)y \Rightarrow$ جمله دوم $=y$

فعالیت ۸۳

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید:

(با توجه به خاصیت پخشی)

الف) $۸x^۲+۱۲x=۴x.۲x+۴x.۳=۴x(۲x+۳)$

(ب.م.م) $=۴x$

ب) $۶a^۴-۱۸a^۳=(۶a^۳.a)-(۶a^۳).(۳)=۶a^۳(a-۳)$

ج) $۷x^۴-۱۴x^۳+۲۱x^۲=(۷x^۲).(x^۲)-(۷x^۲).(۲x)+(۷x^۲).(۳)=۷x^۲(x^۲-۲x+۳)$

د) $۵x^۲y-۱۰xy^۲+۱۵x^۲y=(۵xy).x-(۵xy).(۲y)+(۵xy).(۳x)=۵xy(x-۲y+۳x)$

کار در کلاس ۸۴

باتوجه به نمونهٔ زیر توضیح دهید که چگونه در سه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

الف) $x^۲+۶x+۹=(x+۳)^۲=(x+۳)(x+۳)$

مربع کامل: $x^۲$، مربع کامل: ۹، $۶x=۲(x)(۳)$

BIAMOZ.com

در این سه جمله ای دو جمله‌ی مربع کامل داریم که عبارتند از x^2 و ۹. توجه کنید که جمله‌ی دیگر، دو برابر حاصل ضرب جذر x^2 و ۹ است. پس با استفاده از مربع دو جمله‌ای تجزیه می‌شود. $(۶x = ۲(x)(۳))$

ب) $x^2 - ۴x + ۴ = (x-۲)^2 = (x-۲)(x-۲)$

توجه کنید که $۴x = ۲(x)(۲)$ ←

ج) $n^4 - ۱۰n^2 + ۲۵ = (n^2-۵)^2 = (n^2-۵)(n^2-۵)$

توجه کنید که $۱۰n^2 = ۲(n^2)(۵)$ ←

د) $۸ax^2 + ۲۴axy + ۱۸ay^2 = ۲a(۴x^2+۱۲xy+۹y^2) = ۲a\ (۲x+۳y)^2 = ۲a(۲x+۳y)(۲x+۳y)$

$۲a = (ب.م.م)$

توجه کنید که $۱۲xy = ۲(۲x)(۳y)$

تمرین

۱- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(-۵m)^2(-۲m)^3 - (\frac{۱}{۲}m)^2(-۲m)^3 = (۲۵m^2)(-۸m^3) - (\frac{۱}{۴}m^2)(-۸m^3)$

$= -۲۰۰m^5 + ۲m^5 = -۱۹۸m^5$

ب) $۷a^3 - ۴b^3 + ۵c^3 - (a^3 - ۹b^3 - ۱۱c^3) = ۷a^3 - ۴b^3 + ۵c^3 - a^3 + ۹b^3 + ۱۱c^3$

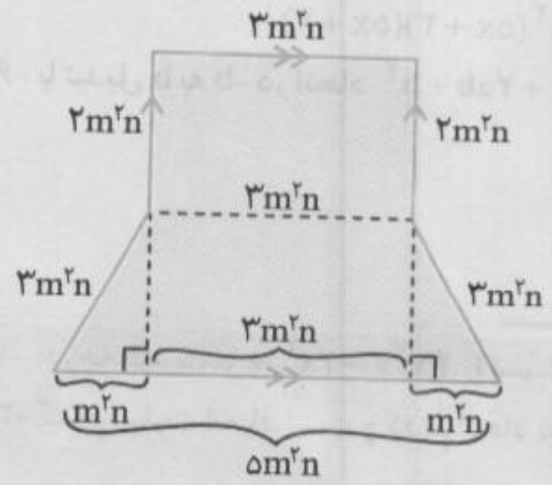
$= ۶a^3 + ۵b^3 + ۱۶c^3$

ج) $(x^m-۱)(x^m-۱) = (x^m)^2 - x^m - x^m + ۱ = x^{۲m} - ۲x^m + ۱$

د) $x - [(y-x) - (y-۱)] = x - [y - x - y + ۱] = x - (-x+۱) = x + x - ۱ = ۲x - ۱$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.

الف)



محیط شکل $= ۳m^2n + ۲m^2n + ۳m^2n$

$+ ۵m^2n + ۳m^2n + ۲m^2n = ۱۸m^2n$

مساحت شکل = مساحت مستطیل + مساحت ذوزنقه

مساحت مستطیل $= (۲m^2n)(۳m^2n) = ۶m^4n^2$

حال با استفاده از رابطه فیثاغورس ارتفاع ذوزنقه را می‌یابیم:

$(\text{ارتفاع})^2 = (۳m^2n)^2 - (m^2n)^2$

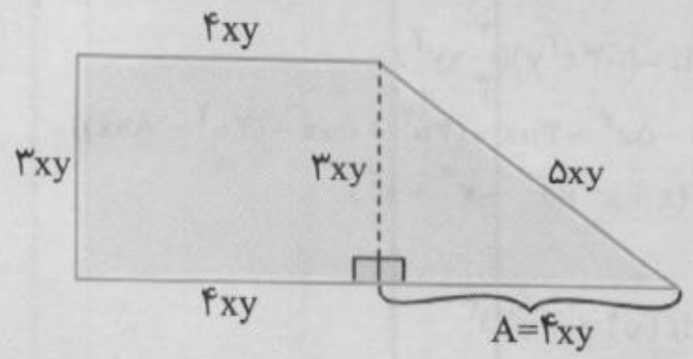
$= ۹m^4n^2 - m^4n^2 = ۸m^4n^2$

ارتفاع $= \sqrt{۸m^4n^2} = ۲\sqrt{۲}m^2n$

ب) قطعه‌ای از ضلع پایین که نامعلوم است، با توجه به رابطهٔ فیثاغورس به صورت زیر به دست می‌آید:

$(۵xy)^2 - (۳xy)^2 = A^2$

$۲۵x^2y^2 - ۹x^2y^2 = ۱۶x^2y^2 = A^2 \Rightarrow A = ۴xy$



محیط شکل $= ۴xy + ۵xy + ۴xy$

$+ ۴xy + ۳xy = ۲۰xy$

مساحت ذوزنقه = مساحت شکل

$= \frac{(۴xy + ۸xy)۳xy}{۲} = ۱۸x^2y^2$

مساحت ذوزنقه $= \frac{(۳m^2n + ۵m^2n) \times ۲\sqrt{۲}m^2n}{۲} = ۸\sqrt{۲}m^4n^2$

مساحت کل شکل $= ۶m^4n^2 + ۸\sqrt{۲}m^4n^2 = (۶ + ۸\sqrt{۲})m^4n^2$

BIAMOZ.com

۳- طرف دیگر عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) $(۵y-۳x)^۲ = (۵y)^۲ - ۲(۵y)(۳x) + (۳x)^۲ = ۲۵y^۲ - ۳۰xy + ۹x^۲$

ب) $(-۳a^۲ - a)^۲ = (-۳a^۲)^۲ - ۲(-۳a^۲)(a) + (a)^۲ = ۹a^۴ + ۶a^۳ + a^۲$

ج) $(۸x - \frac{۱}{۳})^۲ = (۸x)^۲ - ۲(۸x)(\frac{۱}{۳}) + (\frac{۱}{۳})^۲ = ۶۴x^۲ - \frac{۱۶}{۳}x + \frac{۱}{۹}$

د) $(۲/۷)^۲ + ۲(۲/۷)(۳/۳) + (۳/۳)^۲ = (۲/۷ + ۳/۳)^۲ = (۶)^۲ = ۳۶$

۴- به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(x+y)^۲ - (x-y)^۲ = ۴xy$

نشان می‌دهیم حاصل سمت چپ تساوی با سمت راست تساوی برابر است:

$$\left.\begin{array}{l}(x-y)^۲ = x^۲ - ۲xy + y^۲ \\ (x+y)^۲ = x^۲ + ۲xy + y^۲ - ۴xy = x^۲ - ۲xy + y^۲\end{array}\right\} \Rightarrow (x+y)^۲ - (x-y)^۲ = ۴xy$$

ب) $a^۲ + \frac{۱}{a^۲} = (a + \frac{۱}{a})^۲ - ۲ \quad (a \neq ۰)$

سمت چپ $= (a + \frac{۱}{a})^۲ - ۲ = a^۲ + ۲ + \frac{۱}{a^۲} - ۲ = a^۲ + \frac{۱}{a^۲}$ = سمت راست

۵- عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $۲x^۳ + ۸x^۲ + ۸x = ۲x(x^۲ + ۴x + ۴) = ۲x(x+۲)^۲ = ۲x(x+۲)(x+۲)$

ب) $۳a^۳b - ۱۲ab^۳ + a^۳b^۳ = ab(۳a^۲ - ۱۲b^۲ + a^۲b^۲)$

ج) $a(x+۱) + b(x+۱)^۲ = (x+۱)[a + b(x+۱)]$

د) $a^۳ - ۲a^۲ + a = a(a^۲ - ۲a + ۱) = a(a-۱)^۲ = a(a-۱)(a-۱)$

و) $x^۲y^۲ - ۴xy + ۴ = (xy)^۲ - ۴xy + ۴ = (xy-۲)^۲ = (xy-۲)(xy-۲)$

هـ) $۲۵x^۴ + ۳۰x^۳ + ۹x^۲ = x^۲(۲۵x^۲ + ۳۰x + ۹) = x^۲(۵x+۳)^۲ = x^۲(۵x+۳)(۵x+۳)$

۶- با تبدیل b به -b در اتحاد $(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$، طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$$\underbrace{(a+(-b))^۲}_{(a-b)^۲} = a^۲ + ۲a(-b) + (-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

ارزشیابی مستمر

۱- درجه عبارت $۳x^۲y - ۲x^۳ + ۱$ را نسبت به x و نسبت به y بنویسید. (۰/۵)

۲- کدام عبارت اتحاد است و کدام اتحاد نیست؟ چرا؟ (۱/۵)

الف) $۳x(x+۱) = ۳x^۲ + ۳x$ ب) $۲x^۲ - ۳ = x + ۱$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. (۳ نمره)

الف) $-(-۳x^۲y)(\frac{۲}{۳}xy^۲z)$

ب) $-۵a^۲ - ۳ax - (۴a^۲ + ۵ax - (۳a^۲ - ۸ax))$

ج) $(x+x^۲)(x^۴ - x^۳ + x^۲)$

۴- به کمک اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید. (۲)

الف) $(\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲})^۲$ ب) $(۶x^۲ - ۱)^۲$

۵- تجزیه کنید. (۴)

الف) $۵x^۲y - ۱۰xy^۲ - ۱۵xy$ ب) $x^۲ - ۴x + ۴$

ج) $x^۴ + ۱۰x^۲ + ۲۵$ د) $۲ax^۲ - ۱۲ax + ۱۸a$

BIAMOZ.com

۱ $۳x^۲y-۲x^۳+۱$ $\begin{cases}۳=x & \text{(۰/۲۵) درجه نسبت به}\\ ۱=y & \text{(۰/۲۵) درجه نسبت به}\end{cases}$

۲ الف) اتحاد است زیرا این تساوی به ازای هر مقدار حقیقی برقرار است.

$۳x(x+۱)=(۳x).(x)+(۳x).(۱)=۳x^۲+۳x$ (۰/۷۵)

ب) اتحاد نیست زیرا مثلاً برای $x=۱$ تساوی برقرار نیست.

$x=۱\Rightarrow\begin{cases}۲\times۱^۲-۳=۲-۳=-۱ & \text{(سمت چپ تساوی)}\\ x+۱=۱+۱=۲ & \text{(سمت راست تساوی)}\end{cases}\Rightarrow ۲\neq -۱$ (۰/۷۵)

۳

الف) $-(-۳x^۲y)(\frac{۲}{۳}xy^۲z)=۲x^۳y^۳z$ (۱)

ب) $-۵a^۲-۳ax-(۴a^۲+۵ax-(۳a^۲-۸ax))=-۵a^۲-۳ax-۴a^۲-۵ax+۳a^۲-۸ax=-۶a^۲-۱۶ax$ (۱)

ج) $(x+x^۲)(x^۴-x^۳+x^۲)=x^۵-x^۴+x^۳+x^۶-x^۵+x^۴=x^۳+x^۶$ (۱)

۴ الف) $(\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲})^۲=(\sqrt{۲})^۲+۲\times\sqrt{۲}\times(۳\sqrt{۲})+(۳\sqrt{۲})^۲$
$=۲+۶\sqrt{۴}+۱۸=۲۰+۶\sqrt{۴}$ (۱)

ب) $(۶x^۲-۱)^۲=(۶x^۲)^۲-۲\times(۶x^۲)(۱)+(-۱)^۲=۳۶x^۴-۱۲x^۲+۱$ (۱)

۵ الف) $۵x^۲y-۱۰xy^۲-۱۵xy=۵xy(x-۲y-۳)$ (۱)

ب) $x^۲-۴x+۴=(x-۲)^۲=(x-۲)(x-۲)$ (۱)

ج) $x^۴+۱۰x^۲+۲۵=(x^۲+۵)^۲=(x^۲+۵)(x^۲+۵)$ (۱)

د) $۲ax^۲-۱۲ax+۱۸a=۲a(x^۲-۶x+۹)=۲a(x-۳)^۲=۲a(x-۳)(x-۳)$ (۱)

۲ درس چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

چکیده درس:

نکته۱۴: تساوی زیر به اتحاد مزدوج معروف است. این اتحاد می‌گوید برای ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آن دو جمله، مربع جمله اول را منهای مربع جمله دوم می‌کنیم.

$(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحاد مزدوج بنویسید.

الف) $(۳x-۲)(۳x+۲)=(۳x)^۲-۲^۲=۹x^۲-۴$

ب) $(x^۲+۳y)(x^۲-۳y)=(x^۲)^۲-(۳y)^۲=x^۴-۹y^۲$

ج) $۱۰۰۱\times۹۹۹=(۱۰۰۰+۱)(۱۰۰۰-۱)=۱۰۰۰^۲-۱^۲$
$=۱۰۰۰۰۰۰-۱=۹۹۹۹۹۹$

نکته۱۵: از اتحاد مزدوج می‌توان برای تجزیه کمک گرفت. فقط باید دو جملهٔ مختلف‌العلامت باشند که تک‌تک جمله‌های آن را بتوان به صورت مربع نوشت.

مثال: تجزیه کنید.

الف) $۹x^۲-۴=(۳x-۲)(۳x+۲)$

ب) $-\frac{۱}{۲۵}+y^۲=y^۲-\frac{۱}{۲۵}=(y-\frac{۱}{۵})(y+\frac{۱}{۵})$

ج) $۴۹x-۴x^۳=x(۴۹-۴x^۲)=x(۷-۲x)(۷+۲x)$

نکته۱۶: اتحاد یک جمله مشترک به صورت زیر است:

$(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

مثال: حاصل عبارت زیر را به کمک اتحاد یک جمله مشترک، بنویسید.

الف) $(۳x-۲)(۳x+۵)$
$=(۳x)^۲+(-۲+۵)(۳x)+(-۲\times۵)=۹x^۲+۹x-۱۰$

مثال: به کمک اتحاد یک جمله مشترک، تجزیه کنید.

الف) $x^۲-۴x-۵=x^۲+(-۵+۱)x+(-۵\times۱)$
$=(x-۵)(x+۱)$

ب) $۴x^۲-۲x-۲=$
$(۲x)^۲+(-۲+۱)(۲x)+(-۲\times۱)=(۲x-۲)(۲x+۱)$

BIAMOZ.com

فعالیت

۱- حاصل عبارت زیر را با دو روش ارائه شده انجام داده و آنها را کامل کنید.

روش اول: $(a+b+c)^۲=(a+b+c)(a+b+c)=a^۲+ab+ac+ba+b^۲+bc+ca+cb+c^۲$

$=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc$

روش دوم: $((a+b)+c)^۲=(a+b)^۲+۲(a+b)c+c^۲=a^۲+۲ab+b^۲+۲ac+۲bc+c^۲$

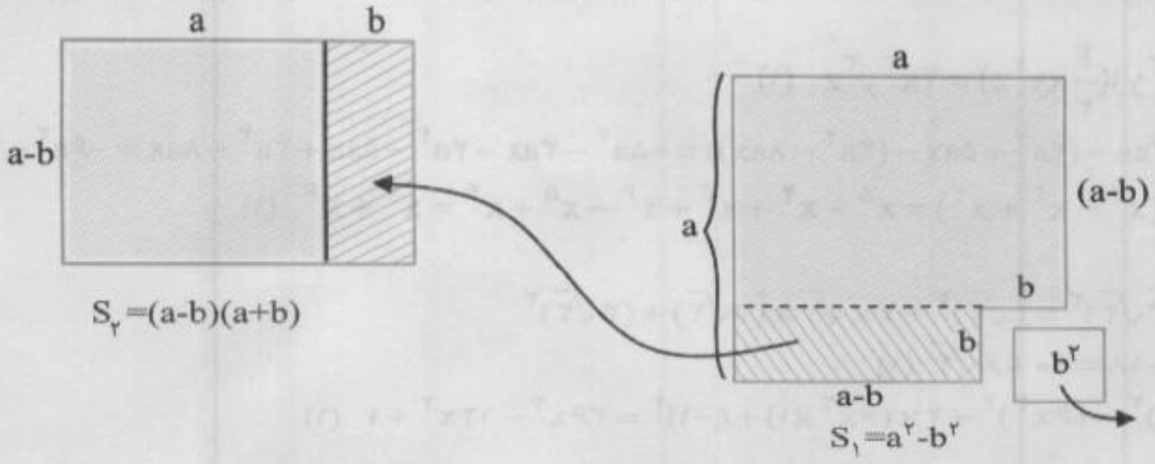
به کمک نتیجهٔ این فعالیت، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$(a+b-c)^۲=a^۲+b^۲+(-c)^۲+۲ab+۲a(-c)+۲b(-c)=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab-۲ac-۲bc$

۲- با استفاده از ضرب عبارت‌های جبری، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$(a+b)(a-b)=a^۲+\cancel{ab}-\cancel{ab}-b^۲=a^۲-b^۲$

اگر a و b مثبت و $b<a$ باشد به کمک شکل‌های زیر درستی اتحاد $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$ را نتیجه بگیرید.



مساحت شکل سمت راست $=a(a-b)+b(a-b)=a^۲-ba+ba-b^۲=a^۲-b^۲$

قسمت هاشورخورده از شکل (۱) را برداشته و به سمت راست آن اضافه می‌کنیم. شکل (۲) حاصل خواهد شد. مساحت شکل ۲ را به دست می‌آوریم:

مساحت شکل سمت چپ $=(a-b)(a+b)$

چون دو مساحت باید با هم برابر باشند پس داریم: $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

این اتحاد را به صورت کلامی بیان کنید.

حاصل ضرب مجموع دو عدد در تفاضل آن‌ها برابر است با تفاضل مربع عدد اول از مربع عدد دوم.

کار در کلاس

۱- تساوی‌های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.

۱) $(۱+a)(۱-a)=۱-a^۲$

۲) $(۲a+۵)(۲a-۵)=۴a^۲-۲۵$

۳) $(t+۳)(t-۳)=t^۲-۹$

۴) $(a-b-c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲-۲ab-۲ac+۲bc$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید؟

۱) $(۱۰-x)(x+۱۰)=(۱۰-x)(۱۰+x)=۱۰۰-x^۲$

۲) $(-y-۲z)(-۲z+y)=-(۲z-y)(-۲z+y)=۴z^۲-y^۲$

۳) $(-۷y+t)(t+۷y)=(t-۷y)(t+۷y)=t^۲-۴۹y^۲$

۴) $(-۴y-۲z)(۲z-۴y)=-(۲z+۴y)(۲z-۴y)=-۴z^۲+۱۶y^۲$

۵) $(x-۲y+۵)(x+۲y-۵)=[x-(۲y-۵)][x+(۲y-۵)]=x^۲-(۲y-۵)^۲$

BIAMOZ.com

فعالیت

۸۷

اتحاد مزدوج در تجزیه عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود.
باتوجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

$$A^۲ - B^۲ = (A+B)(A-B)$$

۱) $x^۲ - ۹ = (x+۳)(x-۳)$

۲) $۴y^۲ - \frac{۱}{۴}z^۴ = (۲y + \frac{۱}{۲}z^۲)(۲y - \frac{۱}{۲}z^۲)$

۳) $(۲x+۱)^۲ - y^۲ = [(۲x+۱) - y][(۲x+۱) + y]$

۴) $۱ - (۳a+z)^۲ = [۱-(۳a+z)][۱+(۳a+z)] = (۱-۳a-z)\ (۱+۳a+z)$

۵) $(۲x+۱)^۲ - (۳x+۴)^۲ = [(۲x+۱)-(۳x+۴)][(۲x+۱)+(۳x+۴)] = (-x-۳)(۵x+۵)$

۶) $x^۴ - y^۴ = (x^۲+y^۲)\ (x^۲-y^۲) = (x^۲+y^۲)(x+y)\ (x-y)$

کار در کلاس

۸۷

۱- محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$$۴x^۲ - (۷-۳y)^۲$$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری، به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و این عبارت را به کمک این اتحاد به صورت زیر تجزیه می‌کند.

$$(۲x-۷+۳y)(۲x+۷-۳y)$$

به نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟

او A را همان $۲x$ و B را همان $(۷-۳y)$ درنظر گرفته است.

$$(۲x-۷+۳y)(۲x+۷-۳y) = (\underbrace{۲x}_{a} - \underbrace{(۷-۳y)}_{b})(\underbrace{۲x}_{a} + \underbrace{(۷-۳y)}_{b})$$

$$= (۲x)^۲ - (۷-۳y)^۲ = ۴x^۲ - (۷-۳y)^۲$$

۲- استفاده از اتحادها، می‌تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را به راحتی امکان‌پذیر کند. به کمک اتحادها تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$۹۸\times۱۰۲ = (۱۰۰-۲)\times(۱۰۰+۲) = ۱۰۰^۲ - ۲^۲ = ۱۰۰۰۰ - ۴ = ۹۹۹۶$$

$$۴۹۷\times۵۰۳ = (۵۰۰-۳)\times(۵۰۰+۳) = ۵۰۰^۲ - ۳^۲ = ۲۵۰۰۰۰ - ۹ = ۲۴۹۹۹۱$$

$$(۱۰۰۱)^۲ = (۱۰۰۰+۱)^۲ = (۱۰۰۰+۱)(۱۰۰۰+۱) = (۱۰۰۰)^۲ + ۲\times(۱۰۰۰)\times۱ + ۱ = ۱۰۰۲۰۰۱$$

فعالیت

۸۸

۱- به تساوی‌های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به دست آمده است. بین جواب و عبارت سمت چپ چه ارتباطی وجود دارد؟

الف) $(x+۲)(x+۵) = x^۲ + ۵x + ۲x + ۱۰ = x^۲ + \underset{۲+۵}{۷x} + \underset{۲\times۵}{۱۰}$

ب) $(x+۹)(x-۴) = x^۲ + ۹x - ۴x - ۳۶ = x^۲ + \underset{۹-۴}{۵x} - \underset{۹\times(-۴)}{۳۶}$

جمله دوم در سمت راست از حاصل ضرب جمله مشترک پرانتزهای سمت چپ تساوی در مجموع جملات غیر مشترک آنها به دست می‌آید و جمله سوم سمت راست تساوی‌ها از حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک پرانتزهای سمت چپ تساوی ایجاد می‌شود.

با توجه به عبارات بالا تساوی زیر را کامل کنید.

$$(x+a)(x+b) = x^۲ + (\ a+b\ )x + ab$$

اتحاد به دست آمده را اتحاد جمله مشترک **می‌نامند.**

BIAMOZ.com

۲- با توجه به فعالیت ۱ اگر طرف راست عبارت بالا را داشته باشیم و بخواهیم آن را به حاصل‌ضرب دو عبارت تجزیه کنیم، اعداد a و b را چگونه تشخیص دهیم؟ دو عدد را طوری پیدا می‌کنیم که مجموع آنها ضریب جملهٔ وسط باشد و حاصل‌ضرب آنها جمله سوم را ایجاد کند.

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

الف) $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$

ب) $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$

ج) $y^2+y-6=(y+3)(y-2)$

د) $y^2-y-6=(y-3)(y+2)$

هـ) $y^2+5y+6=(y+2)(y+3)$

۳- تجزیه عبارت $x^2+10x-24$ را چهار نفر از دانش‌آموزان به کمک اتحاد جمله مشترک به چهار صورت زیر انجام داده‌اند. کدام یک درست و کدام یک نادرست است؛ چرا؟

جواب نفر اول: $(x+6)(x-4)$ **جواب نفر سوم:** $(x+12)(x-2)$

جواب نفر دوم: $(x+6)(x+4)$ **جواب نفر چهارم:** $(x-12)(x+2)$

جواب نفر سوم درست است و بقیه نادرست هستند. زیرا تنها در این جواب است که حاصل‌ضرب دو جمله غیر مشترک پرانتزها -24 می‌شود و حاصل جمع آنها $+10$ است.

تمرین

۱- حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) $(\frac{1}{4}-x)(\frac{1}{4}+x)=\frac{1}{16}-x^2$ (اتحاد مزدوج)

ب) $(5x+4)+(5x+3)=(5x)^2+7(5x)+12=25x^2+35x+12$ (اتحاد جمله مشترک)

ج) $(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})=$ (اتحاد مزدوج)

د) $(3x+y-z)(3x+y+z)=(3x+y)^2-z^2=9x^2+6xy+y^2-z^2$ (اتحاد مزدوج و مربع دو جمله‌ای)

هـ) $(x-1)(x+1)(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1$ (اتحاد مزدوج)

و) $(x-2)(x+2)(x^2+3)=(x^2-4)(x^2+3)=x^4-x^2-12$ (اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک)

۲- در قسمت‌های نقطه‌چین، با استفاده از اتحادها، عبارت‌های مناسب بگذارید.

الف) $(xy-z)(xy+z)=(xy)^2-z^2$

ب) $(\frac{1}{2}y+\sqrt{5})(\frac{1}{2}y-\sqrt{5})=\frac{1}{4}y^2-5$

ج) $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$

د) $(x^2+7)(x^2-5)=x^4+2x^2-35$

۳- عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

الف) $a^2-8a+15=(a-3)(a-5)$

ب) $x^2+x+\frac{1}{4}=(x+\frac{1}{2})^2=(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$

ج) $x^2+10x+24=(x+6)(x+4)$

د) $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$

هـ) $4ax^2-a=a(4x^2-1)=a(2x-1)(2x+1)$

و) $x^2-13x+36=(x-4)(x-9)$

ز) $x^2-12x+36=(x-6)^2=(x-6)(x-6)$

ح) $(x+y)^2-9=(x+y-3)(x+y+3)$

ط) $bx^2-5bx-50b=b(x^2-5x-50)=b(x-10)(x+5)$

ی) $x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$

BIAMOZ.com

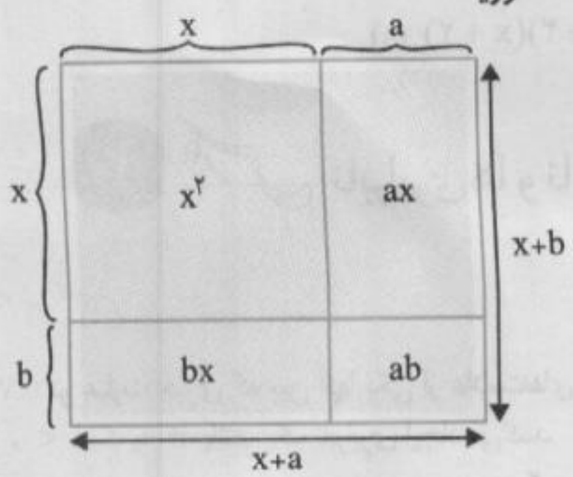
۴- در اتحاد جمله مشترک اگر $a = b$ باشد، چه اتحادی به دست می‌آید؟ اگر a و b قرینه باشد، کدام اتحاد به دست می‌آید؟

اگر $a = b$ باشد اتحاد مربع دوجمله‌ای و اگر $a = -b$ اتحاد مزدوج به دست می‌آید.

$$a = b \Rightarrow (x+a)(x+b) = (x+a)^2$$

$$a = -b \Rightarrow (x+a)(x+b) = (x+a)(x-a)$$

۵- به کمک مساحت‌ها در شکل روبه‌رو، اتحاد جمله مشترک را به‌دست آورید.



مساحت کل شکل $= (x+a)(x+b)$

مساحت کل شکل $= (x^2 + bx + ax + ab)$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

ارزشیابی مستمر

۱- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۳/۲۵ نمره)

الف) $(\cdots + 2x)(\cdots - \cdots) = y^2 - 4x^2$

ب) $(\cdots + \sqrt{5})(\frac{1}{2}y - \sqrt{5}) = \cdots - \cdots$

ج) $(x + \cdots)(x - 3) = \cdots + 7x - \cdots$

د) $(\cdots + x - 3)^2 = \cdots + x^2 + 9 + 2xy - \cdots - \cdots$

۲- حاصل عبارت ۱۰۲×۹۸ را به کمک اتحادها بیابید. (۰/۷۵)

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها بنویسید. (۲)

الف) $(2x-3)(2x+3)$

ب) $(2x - 3y + 1)^2$

ج) $(x-5)(x-2)$

د) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

۴- عبارت‌های زیر را تجزیه کنید. (۴)

الف) $a^4 - 25$

ب) $y^2 - 3y + 2$

ج) $ax^2 + 4a - 4ax$

د) $x^4 - 13x^2 + 36$

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱

الف) $(y+2x)(y-2x) = y^2 - 4x^2$ (۰/۷۵)

ب) $(\frac{1}{2}y + \sqrt{5})(\frac{1}{2}y - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}y^2 - 5$ (۰/۷۵)

ج) $(x+10)(x-3) = x^2 + 7x - 30$ (۰/۷۵)

د) $(y+x-3)^2 = y^2 + x^2 + 9 + 2xy - 6y - 6x$ (۱)

۲

$۹۸ \times ۱۰۲ = (۱۰۰-۲)(۱۰۰+۲) = ۱۰۰^2 - ۴ = ۱۰۰۰۰ - ۴ = ۹۹۹۶$ (۰/۷۵)

۳

الف) $(2x-3)(2x+3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$ (۰/۵)

ب) $(2x-3y+1)^2 = (2x)^2 + (-3y)^2 + 1^2 + 2(2x)(-3y) + 2(2x)(1) + 2(-3y)(1)$

$= 4x^2 + 9y^2 + 1 - 12xy + 4x - 6y$ (۰/۵)

ج) $(x-5)(x-2) = x^2 - 7x + 10$ (۰/۵)

د) $(x-2)(x+2)(x^2+4) = (x^2-4)(x^2+4) = x^4 - 16$ (۰/۵)

BIAMOZ.com

الف) $a^۴-۲۵=(a^۲-۵)(a^۲+۵)$ (۱)

ب) $y^۲-۳y+۲=(y-۱)(y-۲)$ (۱)

ج) $ax^۲-۴ax+۴a=a(x^۲-۴x+۴)=a(x-۲)^۲$ (۱)

د) $x^۴-۱۳x^۲+۳۶=(x^۲-۹)(x^۲-۴)=(x-۳)(x+۳)(x-۲)(x+۲)$ (۱)

۳ درس نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

چکیده درس

نکته۱۷: دو عبارت جبری که بین آنها یکی از علامت‌های $<$ یا $\geq$ ، $>$ ، $\leq$ یا $\neq$ باشد، یک نابرابری ایجاد می‌کنند.

مثال: هر یک از عبارت‌های $x+۱\geq ۲$ ، $-۲<۱$ ، $-(x+۱)^۲\leq ۰$ یک نابرابری هستند.

نکته۱۸: به دو طرف یک نامساوی می‌توان عددی مانند c را افزود یا این‌که از دو طرف آن عددی مانند c را کم کرد:

$a<b\rightarrow a+c<b+c$

$a<b\rightarrow a-c<b-c$

نکته۱۹: اگر دو طرف یک نامساوی را در عددی مثبت ضرب کنیم، (یا بر عددی مثبت تقسیم کنیم) آن نامساوی تغییر نمی‌کند.

$a<b\xrightarrow{c>۰}ac<bc$

نکته۲۰: اگر دو طرف یک نامساوی را در عددی منفی ضرب کنیم (یا بر عددی منفی تقسیم کنیم)، جهت نامساوی عوض می‌شود.

$a<b\xrightarrow{c<۰}ac>bc$

مثال: از آنجا که $۳<۵$ آن‌گاه:

$۳+۲<۵+۲\Rightarrow ۵<۷$

$۳-۲<۵-۲\Rightarrow ۱<۳$

$۳\times ۲<۵\times ۲\Rightarrow ۶<۱۰$

اما اگر نامساوی $۳<۵$ را در (-۲) ضرب کنیم، به نامساوی $-۱۰<-۶$ تبدیل می‌شود.

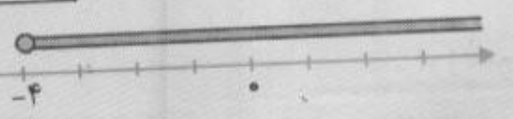
نکته۲۱: برای حل یک نامعادلهٔ درجه اوّل دقیقاً مانند حل یک معادلهٔ درجه اوّل عمل می‌کنیم. اگر ضریب مجهول مثبت باشد، جهت نامساوی ثابت و اگر ضریب مجهول منفی باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید و مجموعه جواب را روی محور نشان دهید.

$۳x-۱\leq ۵x+۷$

$\Rightarrow ۳x-۵x\leq ۷+۱\Rightarrow -۲x\leq ۸$

$\Rightarrow x\geq \frac{۸}{-۲}\Rightarrow \boxed{x\geq -۴}$



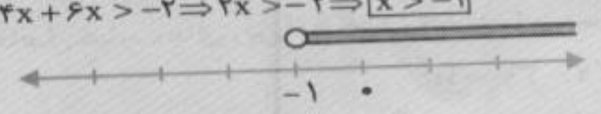
$۲(x-۱)^۲>۲x(x-۳)$

$\Rightarrow ۲(x^۲-۲x+۱)>۲x^۲-۶x$

$\Rightarrow \cancel{۲x^۲}-۴x+۲>\cancel{۲x^۲}-۶x$

$\Rightarrow -۴x+۲>-۶x$

$\Rightarrow -۴x+۶x>-۲\Rightarrow ۲x>-۲\Rightarrow \boxed{x>-۱}$

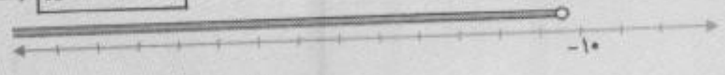


$\frac{۲}{۳}x-۴>x-\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow (\frac{۲}{۳}x-۴>x-\frac{۱}{۲})\times ۶\Rightarrow ۴x-۲۴>۶x-۳$

$\Rightarrow ۴x-۶x>۲۴-۳\Rightarrow -۲x>۲۱\Rightarrow x<\frac{۲۱}{-۲}$

$\Rightarrow \boxed{x<-۱۰/۵}$



اما در نامساوی‌ها:

$a<b\Rightarrow a^۲<b^۲$ ؟

$۲<۵\Rightarrow ۴<۲۵$ ✓

$-۳<-۲\Rightarrow ۹<۴$ ✗

$-۴<۳\Rightarrow ۱۶>۹$ ✗

$-۵<۲\Rightarrow ۲۵>۴$ ✗

$-۲<۱\Rightarrow ۴>۱$ ✗

$-۱<۰\Rightarrow ۱>۰$ ✗

$-۲<۰\Rightarrow ۴>۰$ ✗

$-۳<۰\Rightarrow ۹>۰$ ✗

$-۴<۰\Rightarrow ۱۶>۰$ ✗

$-۵<۰\Rightarrow ۲۵>۰$ ✗

$-۶<۰\Rightarrow ۳۶>۰$ ✗

$-۷<۰\Rightarrow ۴۹>۰$ ✗

$-۸<۰\Rightarrow ۶۴>۰$ ✗

$-۹<۰\Rightarrow ۸۱>۰$ ✗

$-۱۰<۰\Rightarrow ۱۰۰>۰$ ✗

$-۱۱<۰\Rightarrow ۱۲۱>۰$ ✗

$-۱۲<۰\Rightarrow ۱۴۴>۰$ ✗

$-۱۳<۰\Rightarrow ۱۶۹>۰$ ✗

$-۱۴<۰\Rightarrow ۱۹۶>۰$ ✗

$-۱۵<۰\Rightarrow ۲۲۵>۰$ ✗

$-۱۶<۰\Rightarrow ۲۵۶>۰$ ✗

$-۱۷<۰\Rightarrow ۲۸۹>۰$ ✗

$-۱۸<۰\Rightarrow ۳۲۴>۰$ ✗

$-۱۹<۰\Rightarrow ۳۶۱>۰$ ✗

$-۲۰<۰\Rightarrow ۴۰۰>۰$ ✗

$-۲۱<۰\Rightarrow ۴۴۱>۰$ ✗

$-۲۲<۰\Rightarrow ۴۸۴>۰$ ✗

$-۲۳<۰\Rightarrow ۵۲۹>۰$ ✗

$-۲۴<۰\Rightarrow ۵۷۶>۰$ ✗

$-۲۵<۰\Rightarrow ۶۲۵>۰$ ✗

$-۲۶<۰\Rightarrow ۶۷۶>۰$ ✗

$-۲۷<۰\Rightarrow ۷۲۹>۰$ ✗

$-۲۸<۰\Rightarrow ۷۸۴>۰$ ✗

$-۲۹<۰\Rightarrow ۸۴۱>۰$ ✗

$-۳۰<۰\Rightarrow ۹۰۰>۰$ ✗

$-۳۱<۰\Rightarrow ۹۶۱>۰$ ✗

$-۳۲<۰\Rightarrow ۱۰۲۴>۰$ ✗

$-۳۳<۰\Rightarrow ۱۰۸۹>۰$ ✗

$-۳۴<۰\Rightarrow ۱۱۵۶>۰$ ✗

$-۳۵<۰\Rightarrow ۱۲۲۵>۰$ ✗

$-۳۶<۰\Rightarrow ۱۲۹۶>۰$ ✗

$-۳۷<۰\Rightarrow ۱۳۶۹>۰$ ✗

$-۳۸<۰\Rightarrow ۱۴۴۴>۰$ ✗

$-۳۹<۰\Rightarrow ۱۵۲۱>۰$ ✗

$-۴۰<۰\Rightarrow ۱۶۰۰>۰$ ✗

$-۴۱<۰\Rightarrow ۱۶۸۱>۰$ ✗

$-۴۲<۰\Rightarrow ۱۷۶۴>۰$ ✗

$-۴۳<۰\Rightarrow ۱۸۴۹>۰$ ✗

$-۴۴<۰\Rightarrow ۱۹۳۶>۰$ ✗

$-۴۵<۰\Rightarrow ۲۰۲۵>۰$ ✗

$-۴۶<۰\Rightarrow ۲۱۱۶>۰$ ✗

$-۴۷<۰\Rightarrow ۲۲۰۹>۰$ ✗

$-۴۸<۰\Rightarrow ۲۳۰۴>۰$ ✗

$-۴۹<۰\Rightarrow ۲۴۰۱>۰$ ✗

$-۵۰<۰\Rightarrow ۲۵۰۰>۰$ ✗

$-۵۱<۰\Rightarrow ۲۶۰۱>۰$ ✗

$-۵۲<۰\Rightarrow ۲۷۰۴>۰$ ✗

$-۵۳<۰\Rightarrow ۲۸۰۹>۰$ ✗

$-۵۴<۰\Rightarrow ۲۹۱۶>۰$ ✗

$-۵۵<۰\Rightarrow ۳۰۲۵>۰$ ✗

$-۵۶<۰\Rightarrow ۳۱۳۶>۰$ ✗

$-۵۷<۰\Rightarrow ۳۲۴۹>۰$ ✗

$-۵۸<۰\Rightarrow ۳۳۶۴>۰$ ✗

$-۵۹<۰\Rightarrow ۳۴۸۱>۰$ ✗

$-۶۰<۰\Rightarrow ۳۶۰۰>۰$ ✗

$-۶۱<۰\Rightarrow ۳۷۲۱>۰$ ✗

$-۶۲<۰\Rightarrow ۳۸۴۴>۰$ ✗

$-۶۳<۰\Rightarrow ۳۹۶۹>۰$ ✗

$-۶۴<۰\Rightarrow ۴۰۹۶>۰$ ✗

$-۶۵<۰\Rightarrow ۴۲۲۵>۰$ ✗

$-۶۶<۰\Rightarrow ۴۳۵۶>۰$ ✗

$-۶۷<۰\Rightarrow ۴۴۸۹>۰$ ✗

$-۶۸<۰\Rightarrow ۴۶۲۴>۰$ ✗

$-۶۹<۰\Rightarrow ۴۷۶۱>۰$ ✗

$-۷۰<۰\Rightarrow ۴۹۰۰>۰$ ✗

$-۷۱<۰\Rightarrow ۵۰۴۱>۰$ ✗

$-۷۲<۰\Rightarrow ۵۱۸۴>۰$ ✗

$-۷۳<۰\Rightarrow ۵۳۲۹>۰$ ✗

$-۷۴<۰\Rightarrow ۵۴۷۶>۰$ ✗

$-۷۵<۰\Rightarrow ۵۶۲۵>۰$ ✗

$-۷۶<۰\Rightarrow ۵۷۷۶>۰$ ✗

$-۷۷<۰\Rightarrow ۵۹۲۹>۰$ ✗

$-۷۸<۰\Rightarrow ۶۰۸۴>۰$ ✗

$-۷۹<۰\Rightarrow ۶۲۴۱>۰$ ✗

$-۸۰<۰\Rightarrow ۶۴۰۰>۰$ ✗

$-۸۱<۰\Rightarrow ۶۵۶۱>۰$ ✗

$-۸۲<۰\Rightarrow ۶۷۲۴>۰$ ✗

$-۸۳<۰\Rightarrow ۶۸۸۹>۰$ ✗

$-۸۴<۰\Rightarrow ۷۰۵۶>۰$ ✗

$-۸۵<۰\Rightarrow ۷۲۲۵>۰$ ✗

$-۸۶<۰\Rightarrow ۷۳۹۶>۰$ ✗

$-۸۷<۰\Rightarrow ۷۵۶۹>۰$ ✗

$-۸۸<۰\Rightarrow ۷۷۴۴>۰$ ✗

$-۸۹<۰\Rightarrow ۷۹۲۱>۰$ ✗

$-۹۰<۰\Rightarrow ۸۱۰۰>۰$ ✗

$-۹۱<۰\Rightarrow ۸۲۸۱>۰$ ✗

$-۹۲<۰\Rightarrow ۸۴۶۴>۰$ ✗

$-۹۳<۰\Rightarrow ۸۶۴۹>۰$ ✗

$-۹۴<۰\Rightarrow ۸۸۳۶>۰$ ✗

$-۹۵<۰\Rightarrow ۹۰۲۵>۰$ ✗

$-۹۶<۰\Rightarrow ۹۲۱۶>۰$ ✗

$-۹۷<۰\Rightarrow ۹۴۰۹>۰$ ✗

$-۹۸<۰\Rightarrow ۹۶۰۴>۰$ ✗

$-۹۹<۰\Rightarrow ۹۸۰۱>۰$ ✗

$-۱۰۰<۰\Rightarrow ۱۰۰۰۰>۰$ ✗

$-۱۰۱<۰\Rightarrow ۱۰۲۰۱>۰$ ✗

$-۱۰۲<۰\Rightarrow ۱۰۴۰۴>۰$ ✗

$-۱۰۳<۰\Rightarrow ۱۰۶۰۹>۰$ ✗

$-۱۰۴<۰\Rightarrow ۱۰۸۱۶>۰$ ✗

$-۱۰۵<۰\Rightarrow ۱۱۰۲۵>۰$ ✗

$-۱۰۶<۰\Rightarrow ۱۱۲۳۶>۰$ ✗

$-۱۰۷<۰\Rightarrow ۱۱۴۴۹>۰$ ✗

$-۱۰۸<۰\Rightarrow ۱۱۶۶۴>۰$ ✗

$-۱۰۹<۰\Rightarrow ۱۱۸۸۱>۰$ ✗

$-۱۱۰<۰\Rightarrow ۱۲۱۰۰>۰$ ✗

$-۱۱۱<۰\Rightarrow ۱۲۳۲۱>۰$ ✗

$-۱۱۲<۰\Rightarrow ۱۲۵۴۴>۰$ ✗

$-۱۱۳<۰\Rightarrow ۱۲۷۶۹>۰$ ✗

$-۱۱۴<۰\Rightarrow ۱۳۰۹۶>۰$ ✗

$-۱۱۵<۰\Rightarrow ۱۳۲۲۵>۰$ ✗

$-۱۱۶<۰\Rightarrow ۱۳۴۵۶>۰$ ✗

$-۱۱۷<۰\Rightarrow ۱۳۶۸۹>۰$ ✗

$-۱۱۸<۰\Rightarrow ۱۳۹۲۴>۰$ ✗

$-۱۱۹<۰\Rightarrow ۱۴۱۶۱>۰$ ✗

$-۱۲۰<۰\Rightarrow ۱۴۴۰۰>۰$ ✗

$-۱۲۱<۰\Rightarrow ۱۴۶۴۱>۰$ ✗

$-۱۲۲<۰\Rightarrow ۱۴۸۸۴>۰$ ✗

$-۱۲۳<۰\Rightarrow ۱۵۱۲۹>۰$ ✗

$-۱۲۴<۰\Rightarrow ۱۵۳۷۶>۰$ ✗

$-۱۲۵<۰\Rightarrow ۱۵۶۲۵>۰$ ✗

$-۱۲۶<۰\Rightarrow ۱۵۸۷۶>۰$ ✗

$-۱۲۷<۰\Rightarrow ۱۶۱۲۹>۰$ ✗

$-۱۲۸<۰\Rightarrow ۱۶۳۸۴>۰$ ✗

$-۱۲۹<۰\Rightarrow ۱۶۶۴۱>۰$ ✗

$-۱۳۰<۰\Rightarrow ۱۶۹۰۰>۰$ ✗

$-۱۳۱<۰\Rightarrow ۱۷۱۶۱>۰$ ✗

$-۱۳۲<۰\Rightarrow ۱۷۴۲۴>۰$ ✗

$-۱۳۳<۰\Rightarrow ۱۷۶۸۹>۰$ ✗

$-۱۳۴<۰\Rightarrow ۱۷۹۵۶>۰$ ✗

$-۱۳۵<۰\Rightarrow ۱۸۲۲۵>۰$ ✗

$-۱۳۶<۰\Rightarrow ۱۸۴۹۶>۰$ ✗

$-۱۳۷<۰\Rightarrow ۱۸۷۶۹>۰$ ✗

$-۱۳۸<۰\Rightarrow ۱۹۰۴۴>۰$ ✗

$-۱۳۹<۰\Rightarrow ۱۹۳۲۱>۰$ ✗

$-۱۴۰<۰\Rightarrow ۱۹۶۰۰>۰$ ✗

$-۱۴۱<۰\Rightarrow ۱۹۸۸۱>۰$ ✗

$-۱۴۲<۰\Rightarrow ۲۰۱۶۴>۰$ ✗

$-۱۴۳<۰\Rightarrow ۲۰۴۴۹>۰$ ✗

$-۱۴۴<۰\Rightarrow ۲۰۷۳۶>۰$ ✗

$-۱۴۵<۰\Rightarrow ۲۱۰۲۵>۰$ ✗

$-۱۴۶<۰\Rightarrow ۲۱۳۱۶>۰$ ✗

$-۱۴۷<۰\Rightarrow ۲۱۶۰۹>۰$ ✗

$-۱۴۸<۰\Rightarrow ۲۱۹۰۴>۰$ ✗

$-۱۴۹<۰\Rightarrow ۲۲۲۰۱>۰$ ✗

$-۱۵۰<۰\Rightarrow ۲۲۵۰۰>۰$ ✗

$-۱۵۱<۰\Rightarrow ۲۲۸۰۱>۰$ ✗

$-۱۵۲<۰\Rightarrow ۲۳۱۰۴>۰$ ✗

$-۱۵۳<۰\Rightarrow ۲۳۴۰۹>۰$ ✗

$-۱۵۴<۰\Rightarrow ۲۳۷۱۶>۰$ ✗

$-۱۵۵<۰\Rightarrow ۲۴۰۲۵>۰$ ✗

$-۱۵۶<۰\Rightarrow ۲۴۳۳۶>۰$ ✗

$-۱۵۷<۰\Rightarrow ۲۴۶۴۹>۰$ ✗

$-۱۵۸<۰\Rightarrow ۲۴۹۶۴>۰$ ✗

$-۱۵۹<۰\Rightarrow ۲۵۲۸۱>۰$ ✗

$-۱۶۰<۰\Rightarrow ۲۵۶۰۰>۰$ ✗

$-۱۶۱<۰\Rightarrow ۲۵۹۲۱>۰$ ✗

$-۱۶۲<۰\Rightarrow ۲۶۲۴۴>۰$ ✗

$-۱۶۳<۰\Rightarrow ۲۶۵۶۹>۰$ ✗

$-۱۶۴<۰\Rightarrow ۲۶۸۹۶>۰$ ✗

$-۱۶۵<۰\Rightarrow ۲۷۲۲۵>۰$ ✗

$-۱۶۶<۰\Rightarrow ۲۷۵۵۶>۰$ ✗

$-۱۶۷<۰\Rightarrow ۲۷۸۸۹>۰$ ✗

$-۱۶۸<۰\Rightarrow ۲۸۲۲۴>۰$ ✗

$-۱۶۹<۰\Rightarrow ۲۸۵۶۱>۰$ ✗

$-۱۷۰<۰\Rightarrow ۲۸۹۰۰>۰$ ✗

$-۱۷۱<۰\Rightarrow ۲۹۲۴۱>۰$ ✗

$-۱۷۲<۰\Rightarrow ۲۹۵۸۴>۰$ ✗

$-۱۷۳<۰\Rightarrow ۲۹۹۲۹>۰$ ✗

$-۱۷۴<۰\Rightarrow ۳۰۲۷۶>۰$ ✗

$-۱۷۵<۰\Rightarrow ۳۰۶۲۵>۰$ ✗

$-۱۷۶<۰\Rightarrow ۳۰۹۷۶>۰$ ✗

$-۱۷۷<۰\Rightarrow ۳۱۳۲۹>۰$ ✗

$-۱۷۸<۰\Rightarrow ۳۱۶۸۴>۰$ ✗

$-۱۷۹<۰\Rightarrow ۳۲۰۴۱>۰$ ✗

$-۱۸۰<۰\Rightarrow ۳۲۴۰۰>۰$ ✗

$-۱۸۱<۰\Rightarrow ۳۲۷۶۱>۰$ ✗

$-۱۸۲<۰\Rightarrow ۳۳۱۲۴>۰$ ✗

$-۱۸۳<۰\Rightarrow ۳۳۴۸۹>۰$ ✗

$-۱۸۴<۰\Rightarrow ۳۳۸۵۶>۰$ ✗

$-۱۸۵<۰\Rightarrow ۳۴۲۲۵>۰$ ✗

$-۱۸۶<۰\Rightarrow ۳۴۵۹۶>۰$ ✗

$-۱۸۷<۰\Rightarrow ۳۴۹۶۹>۰$ ✗

$-۱۸۸<۰\Rightarrow ۳۵۳۴۴>۰$ ✗

$-۱۸۹<۰\Rightarrow ۳۵۷۲۱>۰$ ✗

$-۱۹۰<۰\Rightarrow ۳۶۱۰۰>۰$ ✗

$-۱۹۱<۰\Rightarrow ۳۶۴۸۱>۰$ ✗

$-۱۹۲<۰\Rightarrow ۳۶۸۶۴>۰$ ✗

$-۱۹۳<۰\Rightarrow ۳۷۲۴۹>۰$ ✗

$-۱۹۴<۰\Rightarrow ۳۷۶۳۶>۰$ ✗

$-۱۹۵<۰\Rightarrow ۳۸۰۲۵>۰$ ✗

$-۱۹۶<۰\Rightarrow ۳۸۴۱۶>۰$ ✗

$-۱۹۷<۰\Rightarrow ۳۸۸۰۹>۰$ ✗

$-۱۹۸<۰\Rightarrow ۳۹۲۰۴>۰$ ✗

$-۱۹۹<۰\Rightarrow ۳۹۶۰۱>۰$ ✗

$-۲۰۰<۰\Rightarrow ۴۰۰۰۰>۰$ ✗

$-۲۰۱<۰\Rightarrow ۴۰۴۰۱>۰$ ✗

$-۲۰۲<۰\Rightarrow ۴۰۸۰۴>۰$ ✗

$-۲۰۳<۰\Rightarrow ۴۱۲۰۹>۰$ ✗

$-۲۰۴<۰\Rightarrow ۴۱۶۱۶>۰$ ✗

$-۲۰۵<۰\Rightarrow ۴۲۰۲۵>۰$ ✗

$-۲۰۶<۰\Rightarrow ۴۲۴۳۶>۰$ ✗

$-۲۰۷<۰\Rightarrow ۴۲۸۴۹>۰$ ✗

$-۲۰۸<۰\Rightarrow ۴۳۲۶۴>۰$ ✗

$-۲۰۹<۰\Rightarrow ۴۳۶۸۱>۰$ ✗

$-۲۱۰<۰\Rightarrow ۴۴۱۰۰>۰$ ✗

$-۲۱۱<۰\Rightarrow ۴۴۵۲۱>۰$ ✗

$-۲۱۲<۰\Rightarrow ۴۴۹۴۴>۰$ ✗

$-۲۱۳<۰\Rightarrow ۴۵۳۶۹>۰$ ✗

$-۲۱۴<۰\Rightarrow ۴۵۷۹۶>۰$ ✗

$-۲۱۵<۰\Rightarrow ۴۶۲۲۵>۰$ ✗

$-۲۱۶<۰\Rightarrow ۴۶۶۵۶>۰$ ✗

$-۲۱۷<۰\Rightarrow ۴۷۰۸۹>۰$ ✗

$-۲۱۸<۰\Rightarrow ۴۷۵۲۴>۰$ ✗

$-۲۱۹<۰\Rightarrow ۴۷۹۶۱>۰$ ✗

$-۲۲۰<۰\Rightarrow ۴۸۴۰۰>۰$ ✗

$-۲۲۱<۰\Rightarrow ۴۸۸۴۱>۰$ ✗

$-۲۲۲<۰\Rightarrow ۴۹۲۸۴>۰$ ✗

$-۲۲۳<۰\Rightarrow ۴۹۷۲۹>۰$ ✗

$-۲۲۴<۰\Rightarrow ۵۰۱۷۶>۰$ ✗

$-۲۲۵<۰\Rightarrow ۵۰۶۲۵>۰$ ✗

$-۲۲۶<۰\Rightarrow ۵۱۰۷۶>۰$ ✗

$-۲۲۷<۰\Rightarrow ۵۱۵۲۹>۰$ ✗

$-۲۲۸<۰\Rightarrow ۵۱۹۸۴>۰$ ✗

$-۲۲۹<۰\Rightarrow ۵۲۴۴۱>۰$ ✗

$-۲۳۰<۰\Rightarrow ۵۲۹۰۰>۰$ ✗

$-۲۳۱<۰\Rightarrow ۵۳۳۶۱>۰$ ✗

$-۲۳۲<۰\Rightarrow ۵۳۸۲۴>۰$ ✗

$-۲۳۳<۰\Rightarrow ۵۴۲۸۹>۰$ ✗

$-۲۳۴<۰\Rightarrow ۵۴۷۵۶>۰$ ✗

$-۲۳۵<۰\Rightarrow ۵۵۲۲۵>۰$ ✗

$-۲۳۶<۰\Rightarrow ۵۵۶۹۶>۰$ ✗

$-۲۳۷<۰\Rightarrow ۵۶۱۶۹>۰$ ✗

$-۲۳۸<۰\Rightarrow ۵۶۶۴۴>۰$ ✗

$-۲۳۹<۰\Rightarrow ۵۷۱۲۱>۰$ ✗

$-۲۴۰<۰\Rightarrow ۵۷۶۰۰>۰$ ✗

$-۲۴۱<۰\Rightarrow ۵۸۰۸۱>۰$ ✗

$-۲۴۲<۰\Rightarrow ۵۸۵۶۴>۰$ ✗

$-۲۴۳<۰\Rightarrow ۵۹۰۴۹>۰$ ✗

$-۲۴۴<۰\Rightarrow ۵۹۵۳۶>۰$ ✗

$-۲۴۵<۰\Rightarrow ۶۰۰۲۵>۰$ ✗

$-۲۴۶<۰\Rightarrow ۶۰۵۱۶>۰$ ✗

$-۲۴۷<۰\Rightarrow ۶۱۰۰۹>۰$ ✗

$-۲۴۸<۰\Rightarrow ۶۱۵۰۴>۰$ ✗

$-۲۴۹<۰\Rightarrow ۶۲۰۰۱>۰$ ✗

$-۲۵۰<۰\Rightarrow ۶۲۵۰۰>۰$ ✗

$-۲۵۱<۰\Rightarrow ۶۳۰۰۱>۰$ ✗

$-۲۵۲<۰\Rightarrow ۶۳۵۰۴>۰$ ✗

$-۲۵۳<۰\Rightarrow ۶۴۰۰۹>۰$ ✗

$-۲۵۴<۰\Rightarrow ۶۴۵۱۶>۰$ ✗

$-۲۵۵<۰\Rightarrow ۶۵۰۲۵>۰$ ✗

$-۲۵۶<۰\Rightarrow ۶۵۵۳۶>۰$ ✗

$-۲۵۷<۰\Rightarrow ۶۶۰۴۹>۰$ ✗

$-۲۵۸<۰\Rightarrow ۶۶۵۶۴>۰$ ✗

$-۲۵۹<۰\Rightarrow ۶۷۰۸۱>۰$ ✗

$-۲۶۰<۰\Rightarrow ۶۷۶۰۰>۰$ ✗

$-۲۶۱<۰\Rightarrow ۶۸۱۲۱>۰$ ✗

$-۲۶۲<۰\Rightarrow ۶۸۶۴۴>۰$ ✗

$-۲۶۳<۰\Rightarrow ۶۹۱۶۹>۰$ ✗

$-۲۶۴<۰\Rightarrow ۶۹۶۹۶>۰$ ✗

$-۲۶۵<۰\Rightarrow ۷۰۲۲۵>۰$ ✗

$-۲۶۶<۰\Rightarrow ۷۰۷۵۶>۰$ ✗

$-۲۶۷<۰\Rightarrow ۷۱۲۸۹>۰$ ✗

$-۲۶۸<۰\Rightarrow ۷۱۸۲۴>۰$ ✗

$-۲۶۹<۰\Rightarrow ۷۲۳۶۱>۰$ ✗

$-۲۷۰<۰\Rightarrow ۷۲۹۰۰>۰$ ✗

$-۲۷۱<۰\Rightarrow ۷۳۴۴۱>۰$ ✗

$-۲۷۲<۰\Rightarrow ۷۳۹۸۴>۰$ ✗

$-۲۷۳<۰\Rightarrow ۷۴۵۲۹>۰$ ✗

$-۲۷۴<۰\Rightarrow ۷۵۰۷۶>۰$ ✗

$-۲۷۵<۰\Rightarrow ۷۵۶۲۵>۰$ ✗

$-۲۷۶<۰\Rightarrow ۷۶۱۷۶>۰$ ✗

$-۲۷۷<۰\Rightarrow ۷۶۷۲۹>۰$ ✗

$-۲۷۸<۰\Rightarrow ۷۷۲۸۴>۰$ ✗

$-۲۷۹<۰\Rightarrow ۷۷۸۴۱>۰$ ✗

$-۲۸۰<۰\Rightarrow ۷۸۴۰۰>۰$ ✗

$-۲۸۱<۰\Rightarrow ۷۸۹۶۱>۰$ ✗

$-۲۸۲<۰\Rightarrow ۷۹۵۲۴>۰$ ✗

$-۲۸۳<۰\Rightarrow ۸۰۰۸۹>۰$ ✗

$-۲۸۴<۰\Rightarrow ۸۰۶۵۶>۰$ ✗

$-۲۸۵<۰\Rightarrow ۸۱۲۲۵>۰$ ✗

$-۲۸۶<۰\Rightarrow ۸۱۷۹۶>۰$ ✗

$-۲۸۷<۰\Rightarrow ۸۲۳۶۹>۰$ ✗

$-۲۸۸<۰\Rightarrow ۸۲۹۴۴>۰$ ✗

$-۲۸۹<۰\Rightarrow ۸۳۵۲۱>۰$ ✗

$-۲۹۰<۰\Rightarrow ۸۴۱۰۰>۰$ ✗

$-۲۹۱<۰\Rightarrow ۸۴۶۸۱>۰$ ✗

$-۲۹۲<۰\Rightarrow ۸۵۲۶۴>۰$ ✗

$-۲۹۳<۰\Rightarrow ۸۵۸۴۹>۰$ ✗

$-۲۹۴<۰\Rightarrow ۸۶۴۳۶>۰$ ✗

$-۲۹۵<۰\Rightarrow ۸۷۰۲۵>۰$ ✗

$-۲۹۶<۰\Rightarrow ۸۷۶۱۶>۰$ ✗

$-۲۹۷<۰\Rightarrow ۸۸۲۰۹>۰$ ✗

$-۲۹۸<۰\Rightarrow ۸۸۸۰۴>۰$ ✗

$-۲۹۹<۰\Rightarrow ۸۹۴۰۱>۰$ ✗

$-۳۰۰<۰\Rightarrow ۹۰۰۰۰>۰$ ✗

$-۳۰۱<۰\Rightarrow ۹۰۶۰۱>۰$ ✗

$-۳۰۲<۰\Rightarrow ۹۱۲۰۴>۰$ ✗

$-۳۰۳<۰\Rightarrow ۹۱۸۰۹>۰$ ✗

$-۳۰۴<۰\Rightarrow ۹۲۴۱۶>۰$ ✗

$-۳۰۵<۰\Rightarrow ۹۳۰۲۵>۰$ ✗

$-۳۰۶<۰\Rightarrow ۹۳۶۳۶>۰$ ✗

$-۳۰۷<۰\Rightarrow ۹۴۲۴۹>۰$ ✗

$-۳۰۸<۰\Rightarrow ۹۴۸۶۴>۰$ ✗

$-۳۰۹<۰\Rightarrow ۹۵۴۸۱>۰$ ✗

$-۳۱۰<۰\Rightarrow ۹۶۱۰۰>۰$ ✗

$-۳۱۱<۰\Rightarrow ۹۶۷۲۱>۰$ ✗

$-۳۱۲<۰\Rightarrow ۹۷۳۴۴>۰$ ✗

$-۳۱۳<۰\Rightarrow ۹۷۹۶۹>۰$ ✗

$-۳۱۴<۰\Rightarrow ۹۸۵۹۶>۰$ ✗

$-۳۱۵<۰\Rightarrow ۹۹۲۲۵>۰$ ✗

$-۳۱۶<۰\Rightarrow ۹۹۸۵۶>۰$ ✗

$-۳۱۷<۰\Rightarrow ۱۰۰۴۸۹>۰$ ✗

$-۳۱۸<۰\Rightarrow ۱۰۱۱۲۴>۰$ ✗

$-۳۱۹<۰\Rightarrow ۱۰۱۷۶۱>۰$ ✗

$-۳۲۰<۰\Rightarrow ۱۰۲۴۰۰>۰$ ✗

$-۳۲۱<۰\Rightarrow ۱۰۳۰۴۱>۰$ ✗

$-۳۲۲<۰\Rightarrow ۱۰۳۶۸۴>۰$ ✗

$-۳۲۳<۰\Rightarrow ۱۰۴۳۲۹>۰$ ✗

$-۳۲۴<۰\Rightarrow ۱۰۴۹۷۶>۰$ ✗

$-۳۲۵<۰\Rightarrow ۱۰۵۶۲۵>۰$ ✗

$-۳۲۶<۰\Rightarrow ۱۰۶۲۷۶>۰$ ✗

$-۳۲۷<۰\Rightarrow ۱۰۶۹۲۹>۰$ ✗

$-۳۲۸<۰\Rightarrow ۱۰۷۵۸۴>۰$ ✗

$-۳۲۹<۰\Rightarrow ۱۰۸۲۴۱>۰$ ✗

$-۳۳۰<۰\Rightarrow ۱۰۸۹۰۰>۰$ ✗

$-۳۳۱<۰\Rightarrow ۱۰۹۵۶۱>۰$ ✗

$-۳۳۲<۰\Rightarrow ۱۱۰۲۲۴>۰$ ✗

$-۳۳۳<۰\Rightarrow ۱۱۰۸۸۹>۰$ ✗

$-۳۳۴<۰\Rightarrow ۱۱۱۵۵۶>۰$ ✗

$-۳۳۵<۰\Rightarrow ۱۱۲۲۲۵>۰$ ✗

$-۳۳۶<۰\Rightarrow ۱۱۲۸۹۶>۰$ ✗

$-۳۳۷<۰\Rightarrow ۱۱۳۵۶۹>۰$ ✗

$-۳۳۸<۰\Rightarrow ۱۱۴۲۴۴>۰$ ✗

$-۳۳۹<۰\Rightarrow ۱۱۴۹۲۱>۰$ ✗

$-۳۴۰<۰\Rightarrow ۱۱۵۶۰۰>۰$ ✗

$-۳۴۱<۰\Rightarrow ۱۱۶۲۸۱>۰$ ✗

$-۳۴۲<۰\Rightarrow ۱۱۶۹۶۴>۰$ ✗

$-۳۴۳<۰\Rightarrow ۱۱۷۶۴۹>۰$ ✗

$-۳۴۴<۰\Rightarrow ۱۱۸۳۳۶>۰$ ✗

$-۳۴۵<۰\Rightarrow ۱۱۹۰۲۵>۰$ ✗

$-۳۴۶<۰\Rightarrow ۱۱۹۷۱۶>۰$ ✗

$-۳۴۷<۰\Rightarrow ۱۲۰۴۰۹>۰$ ✗

$-۳۴۸<۰\Rightarrow ۱۲۱۱۰۴>۰$ ✗

$-۳۴۹<۰\Rightarrow ۱۲۱۸۰۱>۰$ ✗

$-۳۵۰<۰\Rightarrow ۱۲۲۵۰۰>۰$ ✗

$-۳۵۱<۰\Rightarrow ۱۲۳۲۰۱>۰$ ✗

$-۳۵۲<۰\Rightarrow ۱۲۳۹۰۴>۰$ ✗

$-۳۵۳<۰\Rightarrow ۱۲۴۶۰۹>۰$ ✗

$-۳۵۴<۰\Rightarrow ۱۲۵۳۱۶>۰$ ✗

$-۳۵۵<۰\Rightarrow ۱۲۶۰۲۵>۰$ ✗

$-۳۵۶<۰\Rightarrow ۱۲۶۷۳۶>۰$ ✗

$-۳۵۷<۰\Rightarrow ۱۲۷۴۴۹>۰$ ✗

$-۳۵۸<۰\Rightarrow ۱۲۸۱۶۴>۰$ ✗

$-۳۵۹<۰\Rightarrow ۱۲۸۸۸۱>۰$ ✗

$-۳۶۰<۰\Rightarrow ۱۲۹۶۰۰>۰$ ✗

$-۳۶۱<۰\Rightarrow ۱۳۰۳۲۱>۰$ ✗

$-۳۶۲<۰\Rightarrow ۱۳۱۰۴۴>۰$ ✗

$-۳۶۳<۰\Rightarrow ۱۳۱۷۶۹>۰$ ✗

$-۳۶۴<۰\Rightarrow ۱۳۲۴۹۶>۰$ ✗

$-۳۶۵<۰\Rightarrow ۱۳۳۲۲۵>۰$ ✗

$-۳۶۶<۰\Rightarrow ۱۳۳۹۵۶>۰$ ✗

$-۳۶۷<۰\Rightarrow ۱۳۴۶۸۹>۰$ ✗

$-۳۶۸<۰\Rightarrow ۱۳۵۴۲۴>۰$ ✗

$-۳۶۹<۰\Rightarrow ۱۳۶۱۶۱>۰$ ✗

$-۳۷۰<۰\Rightarrow ۱۳۶۹۰۰>۰$ ✗

$-۳۷۱<۰\Rightarrow ۱۳۷۶۴۱>۰$ ✗

$-۳۷۲<۰\Rightarrow ۱۳۸۳۸۴>۰$ ✗

$-۳۷۳<۰\Rightarrow ۱۳۹۱۲۹>۰$ ✗

$-۳۷۴<۰\Rightarrow ۱۳۹۸۷۶>۰$ ✗

$-۳۷۵<۰\Rightarrow ۱۴۰۶۲۵>۰$ ✗

$-۳۷۶<۰\Rightarrow ۱۴۱۳۷۶>۰$ ✗

$-۳۷۷<۰\Rightarrow ۱۴۲۱۲۹>۰$ ✗

$-۳۷۸<۰\Rightarrow ۱۴۲۸۸۴>۰$ ✗

$-۳۷۹<۰\Rightarrow ۱

BIAMOZ.com

در شکل بالا چنانچه وزنه‌ای p کیلوگرمی باشد به طوری که $a = b + p$، در این صورت برای اینکه کفه‌های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه p کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟ روی کفه‌ای که وزنه **b** قرار دارد.

باتوجه به برابری‌های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هرکدام بنویسید.

الف) $x = y + ۴ \Rightarrow x > y$

ب) $m + ۱ = n + ۳ \Rightarrow m = n + ۲ \Rightarrow m > n$

ج) $a - ۲ = b + ۳ \Rightarrow a = b + ۵ \Rightarrow a > b$

د) $۲m = ۳n \quad (m,n > ۰) \Rightarrow m > n$

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد، فقط یکی از حالت‌های «a بزرگ‌تر از b» یا «a کوچک‌تر از b» یا «a برابر با b» را خواهیم داشت.

چنانچه عدد حقیقی a منفی نباشد، در این صورت $a > ۰$ یا $a = ۰$، در این حالت می‌نویسیم $a \geq ۰$ و می‌خوانیم a بزرگ‌تر یا برابر با ۰ است؛ مانند $۲ \geq ۰$ یا $۰ \geq ۰$ یا $\frac{۱}{۳} \geq ۰$.

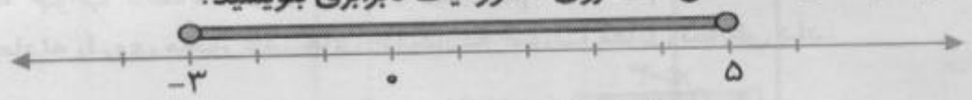
چنانچه a و b دو عدد حقیقی باشند به‌طوری‌که a از b کمتر نباشد، در این صورت $a > b$ یا $a = b$ در این حالت می‌نویسیم $a \geq b$.

کار در کلاس

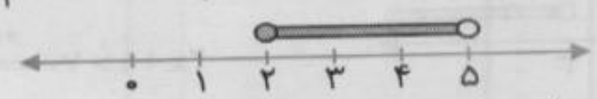
۹۱

۱- متناظر با هریک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.

الف) $-۳ \leq x \leq ۵$



ب) $۲ \leq x < ۵$



۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $a + b > ۰$ آنگاه، a و b هردو مثبت هستند. نادرست $(+۳ + (-۲) > ۰)$

ب) اگر $ab > ۰$ آنگاه، a و b هم‌علامت هستند. درست

ج) اگر $\frac{ab}{c} < ۰$ آنگاه، a و b و c منفی هستند. نادرست $(\frac{۲ \times ۳}{-۵} < ۰)$

د) اگر $a^۲b < ۰$ آنگاه، b منفی است. درست

۳- عبارت‌های کلامی را به صورت جبری بنویسید.

- ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگ‌تر است. $\leftarrow ۳x - ۱ > ۷$
- ۸ از قرینهٔ دو برابر عددی به علاوه ۳ بزرگ‌تر است. $\leftarrow -(۲x + ۳) > ۸$

فعالیت

۹۱

۱- به دو طرف نابرابری‌های زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$-۳ < ۱ \xrightarrow{+۳} -۳ + ۳ < ۱ + ۳ \Rightarrow ۰ < ۴$

$-۳ < ۱ \xrightarrow{-۷} -۳ - ۷ < ۱ - ۷ \Rightarrow -۱۰ < -۶$

$-۳ < -۲ \xrightarrow{-۱۰۰} -۳ - ۱۰۰ < -۲ - ۱۰۰ \Rightarrow -۱۰۳ < -۱۰۲$

با توجه به حاصل عبارت‌های دو طرف نامساوی‌ها، نابرابری باز هم برقرار است.

۲- دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری‌ها تغییر می‌کنند؟

$-۷ > -۹ \xrightarrow{\times ۳} -۲۱ > -۲۷$

$-۷ > -۹ \xrightarrow{\times (-۳)} ۲۱ < ۲۷$

$-۷ > -۹ \xrightarrow{\times ۰} ۰ = ۰$

$-۷ > -۹ \xrightarrow{\times (-۱)} ۷ < ۹$

باتوجه به حاصل‌ضرب‌ها مشاهده می‌کنیم که نابرابری‌ها تغییر می‌کند.

BIAMOZ.com

۳- نابرابری $۲x+۱>۷$ را در نظر بگیرید: این نابرابری شامل متغیر x است و درجه نسبت به x با ۱ برابر است؛ در این صورت به این نابرابری، نامعادلهٔ یک مجهولی درجه اول می‌گوییم.

در جدول زیر مقدارهای داده شده را به جای x قرار دهید؛ آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟ خیر

نامعادله	$x=-۱$	$x=۲$	$x=۳$	$x=۴$	$x=۷$
$۲x+۱>۷$	$۲(-۱)+۱>۷$	$۲(۲)+۱>۷$	$۲(۳)+۱>۷$	$۲(۴)+۱>۷$	$۲(۷)+۱>۷$
	↓	↓	↓	↓	↓
	$-۱>۷$	$۵>۷$	$۷>۷$	$۹>۷$	$۱۵>۷$
	نادرست	نادرست	نادرست	درست	درست

مجموعه مقادیری که به ازای آنها، نامعادله به نابرابری درست تبدیل شود، مجموعهٔ جواب نامعادله است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ در مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

- دو طرف نامعادله را با ۱- جمع کنید.

$$۲x+۱-۱>۷-۱\Rightarrow ۲x>۶$$

- دو طرف نامعادلهٔ حاصل را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر ۲ تقسیم کنید.

$$\frac{۱}{۲}\times ۲x>\frac{۱}{۲}\times ۶\Rightarrow x>۳$$

- باتوجه به نابرابری $x>۳$ متوجه می‌شویم که مجموعهٔ همهٔ عددهای بزرگ‌تر از ۳، مجموعه جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با D نمایش دهیم، خواهیم داشت $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x>۳\}$ می‌توان مجموعه جواب این نامعادله را روی محور عددهای حقیقی به صورت مقابل نمایش داد.



$$۲x+۱>۷ \xrightarrow{+(-۱)} ۲x>۶ \xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} x>۳$$

کار در کلاس

۹۳

۱- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $۲x+۷\geq ۱۵\Rightarrow \quad ۲x\geq ۱۵-۷\rightarrow ۲x\geq ۸\rightarrow x\geq ۴ \quad D=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq ۴\}$

ب) $\frac{x}{۳}-\frac{۱}{۲}<\frac{x-۱}{۶}\xrightarrow{\times ۶}۶\times\frac{x}{۳}-۶\times\frac{۱}{۲}<۶\times\frac{x-۱}{۶}$

$$\longrightarrow ۲x-۳<x-۱\xrightarrow{+(-x)}۲x-۳+(-x)<x-۱+(-x)$$

$$\longrightarrow x-۳<-۱\xrightarrow{+۳}x<۲ \quad D=\{x\in\mathbb{R}\mid x<۲\}$$

ج) $۳(x-۱)\geq ۲x+۱\rightarrow ۳x-۳\geq ۲x+۱\rightarrow ۳x-۲x>+۱+۳$

$$\rightarrow x>۴ \quad D=\{x\in\mathbb{R}\mid x>۴\}$$

د) $\frac{۲}{۳}(x+۷)-\frac{x}{۴}\leq\frac{۱}{۲}(۳-x)+\frac{x}{۶}\xrightarrow{\times ۱۲}\Rightarrow ۸(x+۷)-۳x\leq ۶(۳-x)+۲x$

$$\rightarrow ۸x+۵۶-۳x\leq ۱۸-۶x+۲x\rightarrow ۵x+۵۶\leq ۱۸-۴x$$

$$\rightarrow ۵x+۴x\leq -۵۶+۱۸\rightarrow ۹x\leq -۳۸\rightarrow x\leq\frac{-۳۸}{۹} \quad D=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq\frac{-۳۸}{۹}\}$$

تمرین

۹۳

۱- در جاهای خالی نمادهای $>$ یا $<$ را جایگزین کنید.

الف) $a-b=۱$ در این صورت $a\boxed{>}b$.

ب) اگر $u-v=-۲$ در این صورت $u\boxed{<}v$.

ج) اگر $۲(p-۱)=۲q-۳$ در این صورت $p\boxed{<}q$.

د) اگر $\frac{a-b}{۲}=-۳$ در این صورت $a\boxed{<}b$.

BIAMOZ.com

۲- علامت عددهای حقیقی c,b,a را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشد:

الف) $\frac{ac}{b^2} < 0$

$b \neq 0 , a < 0 , c > 0$

$b \neq 0 , a > 0 , c < 0$

ب) $\frac{a}{bc} > 0$

$a > 0, b > 0, c > 0$

$a > 0, b < 0, c < 0$

$a < 0, b < 0, c > 0$

$a < 0, b > 0, c < 0$

ج) $ab > 0$

$a > 0, b > 0$

$a < 0, b < 0$

د) $\frac{a^2}{bc} > 0$

$a \neq 0, b > 0, c > 0$

$a \neq 0, b < 0 , c < 0$

۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2(x-3)+5<5-x$

$2x-6+5<5-x \Rightarrow 2x-1<5-x \Rightarrow 2x+x<5+1 \Rightarrow 3x<6 \Rightarrow x<2$

$\Rightarrow D=\{x \in \mathbb{R} \mid x<2\}$

ب) $3-2x \geq 5(3-2x)$

$3-2x \geq 15-10x \Rightarrow -2x+10x \geq 15-3 \Rightarrow 8x \geq 12 \Rightarrow x \geq \frac{12}{8}=\frac{3}{2} \Rightarrow D=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\}$

ج) $\frac{y-3}{4}-1>\frac{y}{2} \xrightarrow{\times 4} y-3-4>2y \Rightarrow y-7>2y \Rightarrow y<-7 \Rightarrow D=\{y \in \mathbb{R} \mid y<-7\}$

د) $-2-\frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3} \xrightarrow{\times 12} -24-3q \leq 4(1+q) \Rightarrow -24-3q \leq 4+4q \Rightarrow -4q-3q \leq 24+4$

$-7q \leq 28 \Rightarrow q \geq \frac{28}{-7} \Rightarrow q \geq -4 \Rightarrow \{q \in \mathbb{R} \mid q \geq -4\}$

۴- اگر $a^2 > b^2$ آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت، $a > b$ ؟ خیر برای مثال $(-2)^2 > (-3)^2$ اما $-2 > -3$

۵- اگر $a,b > 0$ و $a^2 > b^2$ نشان دهید $a > b$ (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید.)

$a^2 > b^2 \Rightarrow a^2-b^2 > 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (a-b)(a+b) > 0$

$\xrightarrow{a+b>0} (a-b) > 0 \Rightarrow a > b$

۶- عبارت‌های کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می‌شود.

$3x > 2x + 300$ (پول علی $= x$)

ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b، حداکثر ۶ واحد است. $\frac{a}{2}+4b<6$

۷- دو نفر با وزن‌های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند که به منابع غذایی دسترسی ندارند. آنها همراه خود مواد غذایی برده‌اند که ۴۵۰۰ کیلوکالری انرژی دارد. اگر فرض کنیم هر انسان هر روز حداقل به اندازهٔ سه برابر وزن خود کیلوکالری انرژی نیاز دارد، آنها حداکثر چند روز می‌توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

$\left.\begin{matrix} 85 \times 3 = 255 \\ 65 \times 3 = 195 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 255+195=450$

این دو نفر هر روز حداقل ۴۵۰ کیلو کالری انرژی نیاز دارند. چون مجموع کیلوکالری‌ها کمتر از ۴۵۰۰ است. اگر x تعداد روزهای گذرانده شده باشد پس $450x < 4500$.

$450x < 4500 \Rightarrow x < 10 \Rightarrow$ دو نفر حداکثر ۱۰ روز دوام می‌آورند.

BIAMOZ.com

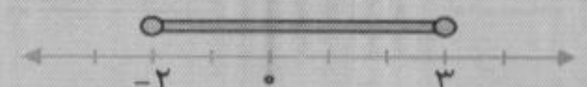
ارزشیابی مستمر

۱- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (۱/۵نمره)

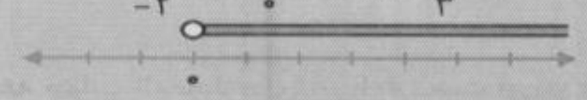
الف) اگر $ab < 0$ ، a و b مختلف العلامت هستند. ب) اگر $a + b < 0$ ، a و b هردو منفی هستند.

۲- متناظر با هر محور یک نابرابری بنویسید. (۱/۵)

الف)



ب)



۳- اگر $a^2 < b^2$ آیا می‌توان گفت همواره $a < b$ است؟ (۱)

۴- نامعادله‌های زیر را حل کنید. (۳)

الف) $2(x-3) < 3x+1$ ب) $\frac{2x-1}{3} - 1 < x + \frac{2}{3}$

۵- اگر $\frac{a^2}{bc} < 0$ علامت عددهای حقیقی a و b و c را تعیین کنید. (۱)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) درست (۰/۷۵) ب) نادرست، زیرا ممکن است یکی مثبت و دیگری منفی باشد ولی عدد منفی مقدار بیشتری داشته باشد. (۰/۷۵)

۲ الف) $-2 \le x \le 3$ (۰/۷۵) ب) $x > 0$ (۰/۷۵)

۳ خیر، مثلاً $(-2)^2 < (-3)^2$ است ولی $-2 \not< -3$ (۱)

۴ الف) $2(x-3) < 3x+1 \Rightarrow 2x-6 < 3x+1 \Rightarrow 2x-3x < 6+1 \Rightarrow -x < 7 \Rightarrow \boxed{x > -7}$ (۱/۵)

ب) $\frac{2x-1}{3} - 1 < x + \frac{2}{3} \overset{\times 3}{\Rightarrow} 2x-1-3 < 3x+2 \Rightarrow 2x-4 < 3x+2 \Rightarrow 2x-3x < 2+4 \Rightarrow -x < 6 \Rightarrow \boxed{x > -6}$ (۱/۵)

۵ اگر $\frac{a^2}{bc} < 0$ باشد، با توجه به اینکه همواره $a^2 \ge 0$ پس حتماً باید $b.c$ منفی باشد، یعنی b و c مختلف العلامت هستند. پس a هر علامتی می‌تواند داشته باشد و b و c مخالف صفر و مختلف العلامت هستند. (۱)

آزمون تکمیلی

مبحث: فصل ۵ مدت: ... دقیقه تاریخ: ../../..

۱- درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. ۰/۵

الف) عبارت $-3x^2 - 4x^3y$ نسبت به x از درجه ۲ است.

ب) برابری‌ای که به ازای هر مقدار برای متغیرها برقرار باشد، یک اتحاد نام دارد.

۲- کدام عبارت اتحاد است و کدام معادله است؟ ۱/۵

الف) $3x(x+1) = 3x^2 + 3x$ ب) $2x + 3 = 3x + 2$

۳- حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها بنویسید.(۲) ۲

الف) $(2x-1)^2$ ب) $(3x+4)(3x-4)$ ج) $(x+2)(x-4)$ د) $(2x+1)(2x+5)$

۴- عبارت های زیر را تجزیه کنید. ۲/۵

الف) $4x^2 - 2x$ ب) $2x^2 + 8x + 8$

ج) $x^2 - 64y^2$ د) $x^4 - 1$

ه) $x^2 - 5x + 6$

BIAMOZ.com

۵- حاصل عبارت $(x+1)^3$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای بیابید. ۱/۵

۶- نامعادله های زیر را حل کنید. ۲

الف) $(3x-4)x>3x^2-x+3$

ب) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}<x+\frac{1}{3}$

پاسخ سؤالات امتحانی

۱ الف) نادرست (۰/۲۵)

ب) درست (۰/۲۵)

۲ الف) اتحاد است (۰/۲۵)، زیرا:

$3x(x+1)=3x^2+3x \Rightarrow 3x^2+3x=3x^2+3x$ (۰/۵)

ب) معادله است. زیرا فقط به ازای $x=-1$ تساوی برقرار است.

$-2x-3=3x+2 \Rightarrow -2x-3x=2+3 \Rightarrow -5x=5 \Rightarrow x=-1$ (۰/۵)

۳

الف) $(2x-1)^2=4x^2-4x+1$ (۰/۵)

ب) $(3x-4)(3x+4)=9x^2-16$ (۰/۵)

ج) $(x-4)(x+2)=x^2-2x-8$ (۰/۵)

د) $(2x+1)(2x+5)=(2x)^2+(1+5)(2x)+1\times5=4x^2+12x+5$ (۰/۵)

۴

الف) $4x^2-2x=2x(2x-1)$ (۰/۵)

ب) $2x^2+8x+8=2(x^2+4x+4)=2(x+2)^2=2(x+2)(x+2)$ (۰/۵)

ج) $x^2-64y^2=(x-8y)(x+8y)$ (۰/۵)

د) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+1)$

هـ) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ (۰/۵)

۵

$(x+1)^3=(x+1)^2(x+1)=(x^2+2x+1)(x+1)=x^3+3x^2+3x+1$

۶

الف) $(3x-4)x>3x^2-x+3 \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} 3x^2-4x>3x^2-x+3$

$\overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} -4x+x>3 \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} -3x>3 \Rightarrow x<-1$ (۰/۲۵)

ب) $(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}<x+\frac{1}{3})\times6$ (۰/۲۵)

$4x-3<6x+2 \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} 4x-6x<2+3 \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} -2x<5 \Rightarrow x>\frac{-5}{2}$ (۰/۲۵)

BIAMOZ.com

فصل ۶ خط و معادله‌های خطی

درس ۱ معادلهٔ خط

چکیده درس:

نکته ۱: هر معادلهٔ خط در شکل استاندارد خود به صورت $y = ax + b$ است. هر معادلهٔ خط بی‌شمار جواب دارد. یعنی بی‌شمار نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ می‌توان یافت که تساوی $y = ax + b$ را برقرار کنند.

مثال: معادلات $y = 2x$، $y = x + 1$، $y = 2x - 3$ و $y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$ همگی معادلات خطی هستند، زیرا همه نقاطی که جواب‌های این معادلات هستند روی یک خط راست قرار می‌گیرند.

نکته ۲: برای رسم نمودار یک معادله خط کافی است دو نقطه از آن خط را بیابیم. از آنجا که از هر دو نقطه فقط یک خط راست می‌گذرد، با رسم خط گذرنده از آن دو نقطه نمودار موردنظر به‌دست می‌آید.

مثال: معادله خط $y = 2x + 3$ را رسم کنید.

ابتدا مختصات دو نقطه از این خط را می‌یابیم. سپس خط گذرنده از این دو نقطه را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱
y	۳	۵
	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$



نکته ۳: برای اینکه تشخیص دهیم آیا یک نقطه روی یک خط قرار دارد یا نه می‌توانیم مختصات نقطه را در معادله خط جایگذاری کنیم. اگر تساوی برقرار شود، یعنی نقطه روی خط قرار دارد.

مثال: آیا نقطه $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ روی خط $x + y = -۱$ قرار دارد؟

مختصات نقطه را در معادله خط جایگذاری می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} x = ۱ \\ y = -۲ \end{matrix}\right\} \rightarrow ۱ + (-۲) = -۱ \Rightarrow -۱ = -۱ \Rightarrow$$

نقطه روی خط قرار دارد

مثال: محل برخورد خط $y = \frac{۲}{۳}x - ۲$ را با محورهای مختصات بیابید.

$$\text{محل برخورد با محور } x \text{ ها} \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow ۰ = \frac{۲}{۳}x - ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}x = ۲ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\text{محل برخورد با محور } y \text{ ها} \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = \frac{۲}{۳} \times ۰ - ۲$$

$$\Rightarrow y = -۲ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

مثال: مختصات نقطه‌ای از خط $y = 2x - ۵$ را بیابید که عرض آن (-۲) باشد.

به جای y در معادلهٔ خط (-۲) را جایگزین می‌کنیم:

$$-۲ = 2x - ۵ \Rightarrow 2x = ۵ - ۲ = ۳$$

$$\Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} \\ -۲ \end{bmatrix}$$

نکته ۴: خط‌های مبدا گذر (خط‌هایی که از نقطه $O = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ می‌گذرند) همگی دارای معادله‌ای به شکل $y = ax$ هستند.

مثال: خط‌ها به معادلات $y = 2x$، $y = -\frac{۱}{۲}x$، $y = \sqrt{۲}x$، $y = ۰/۳x$ همگی از مبدا می‌گذرند. چون نقطه $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ در همه آنها صدق می‌کند.

فعالیت

۹۶

دوچرخه سواری با سرعت ثابت دو متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر را طی می‌کند. جدول زیر را کامل کنید.

زمان (ثانیه) x	۰	۱	۱/۵	۲	۳	۳/۵	۴	۵
مسافت (متر) y	۰	۲	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰

بین زمان و مسافت طی شده چه رابطه‌ای هست؟ مسافت طی شده دو برابر مدت زمان سپری شده است.

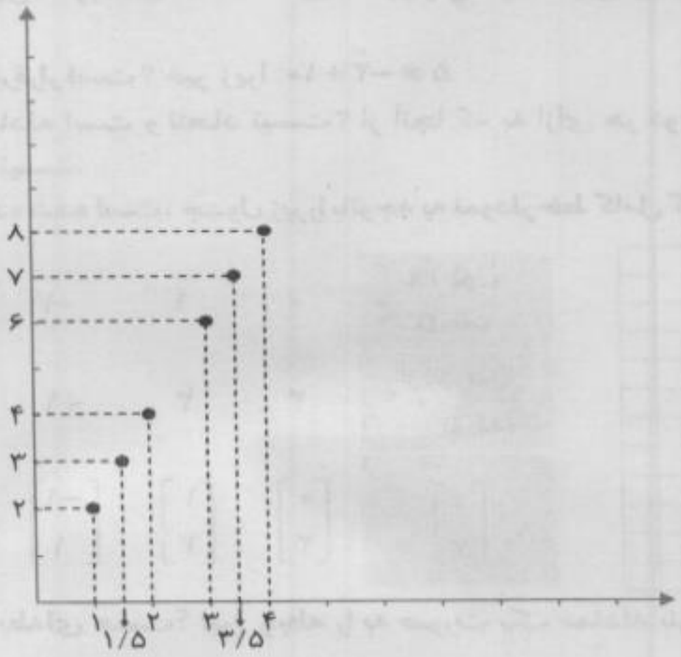
BIAMOZ.com

پس از ۱۰۰ ثانیه چه مسافتی طی شده است؟ $۲\times۱۰۰=۲۰۰$ متر

اگر x ثانیه بگذرد چه مسافتی طی شده است؟ $۲x$ متر

زوج عددهایی را که در جدول به‌دست آوردید به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **نشان دهید و نمایش هر نقطه را روی نمودار مشخص کنید؛ این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟** همهٔ نقطه‌ها روی یک خط راست قرار دارند.

اگر این نقطه‌ها را به هم وصل کنیم چه شکلی به‌دست می‌آید؟ یک خط راست به‌دست می‌آید.



کار در کلاس ۹۷

۱- اگر طول ضلع یک مربع را با x و محیط آن را با y نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین x و y هست؟ محیط مربع چهار برابر ضلع آن است. یعنی y توان دوم x است.

ضلع x →	۱	۲	۳	۴	۱۰۰	x
محیط y →	۴	۸	۱۲	۱۶	۴۰۰	۴x

$y=۴x$

۲- اگر طول ضلع یک مربع را با x و مساحت مربع را با y نشان دهیم، بین x و y چه رابطه‌ای هست؟ پس از کامل کردن جدول زیر، هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید. مساحت مربع، توان دوم ضلع مربع است.



ضلع x (سانتی‌متر)	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
مساحت y (سانتی‌مترمربع)	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴	۶/۲۵	۹
نقطه‌ها	$\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۰/۵\\۰/۲۵\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۱/۵\\۲/۲۵\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۲/۵\\۶/۲۵\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۳\\۹\end{bmatrix}$

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟ خیر، این نقاط روی یک خط راست نیستند.

BIAMOZ.com

فعالیت

۱- معادله $y=-x+10$ چند پاسخ دارد؟ پنج پاسخ آن را به صورت زیر بنویسید:

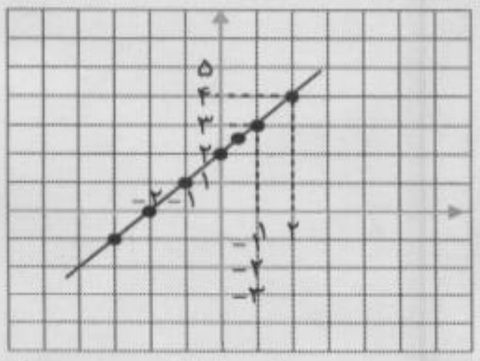
$\begin{cases}x=10\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}$ $\begin{cases}x=7\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=8\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=9\end{cases}$

توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد. به جای یکی از مجهولات (x یا y) یک عدد دلخواه درنظر می‌گیریم، در این صورت یک معادله یک مجهولی درجه اول ایجاد می‌شود که با حل آن مجهول دیگر نیز به دست می‌آید.

آیا تساوی برای $x=2$ و $y=5$ برقرار است؟ خیر زیرا $10+2-\neq 5$

توضیح دهید چرا این تساوی معادله است و اتحاد نیست؟ از آنجا که به ازای هر دو مقدار دلخواه برای x و y تساوی برقرار نیست، پس یک اتحاد نیست.

۲- در شکل زیر نمودار یک خط داده شده است. جدول زیر را باتوجه به نمودار خط کامل کنید.



x (طول نقطه)	۰	۱	-۱	۲	-۲	$\frac{1}{2}$
y (عرض نقطه)	۲	۳	+۱	۴	۰	۲/۵
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\2/5\end{bmatrix}$

بین طول و عرض نقطه‌ها چه رابطه‌ای هست؟ این رابطه را به صورت یک معادله بنویسید. عرض ۲ واحد بیشتر طول است. یعنی $y=x+2$.

۳- پنج جواب برای هریک از معادله‌های زیر بنویسید.

$3x-4y=12$ $\begin{cases}x=0\\y=-3\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=-\frac{3}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\frac{4}{3}\\y=-4\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{10}{3}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$y=2x-1$ $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=7\end{cases}$

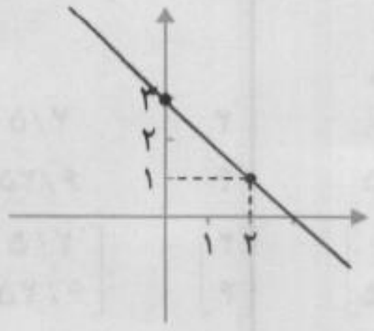
توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله سمت راست راحت‌تر و سریع‌تر است یا در معادله سمت چپ؟ در معادله سمت راست (پایین) راحت‌تر است. زیرا در این معادله با در نظر گرفتن یک عدد دلخواه برای x، مقدار y بلافاصله حاصل می‌شود و نیازی به حل یک معادله نیست.

کار در کلاس

۱- نمودار خط‌های با معادلهٔ زیر را رسم کنید.

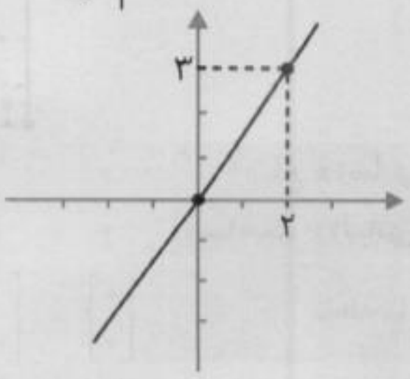
$y=-x+3$

x	۰	۲
y	۳	۱



$y=\frac{3}{2}x$

x	۰	۲
y	۰	۳



BIAMOZ.com

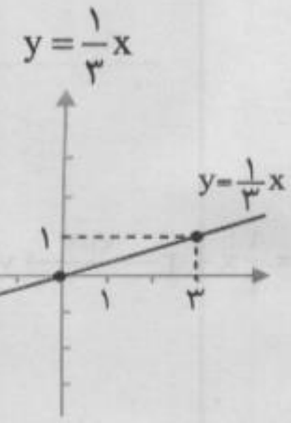
۲- آیا خط $y=۳x$ از مبدأ مختصات (یعنی نقطه $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$) می‌گذرد؟ چرا؟ بله- زیرا با در نظر گرفتن $x=۰$ مقدار $y=۰$ به دست می‌آید. یعنی $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ یک جواب معادله $y=۳x$ و یک نقطه از نمودار آن است.

۳- اگر در معادله $y=ax$ به جای عدد a، عددهای مختلفی قرار دهیم، بیشمار معادله خطی مثل $y=۳x$، $y=-x$، $y=۲x$ و ... به‌دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط از مبدأ مختصات می‌گذرند؟ بله، زیرا در همگی این معادله‌ها نقطه $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ صدق می‌کند. یعنی $a\times۰=۰$

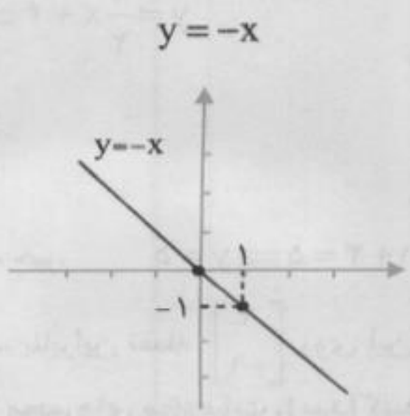
فعالیت ۹۹

۱- در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه با توجه به مختصات هر نقطه، معادلهٔ خط را حدس بزنید.

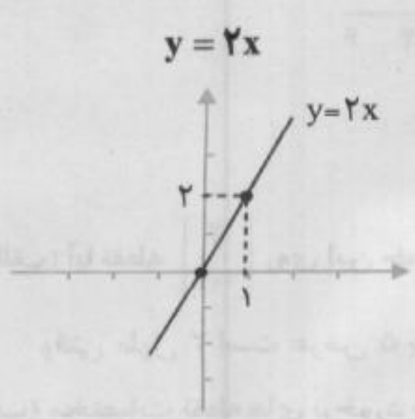
ب) $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$ $y=\frac{۱}{۳}x$



الف) $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}$ $y=-x$



$\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ $y=۲x$



۲- در فعالیت ۱ برای هر مورد مختصات دو نقطه دیگر را روی هر خط به‌دست آورید.

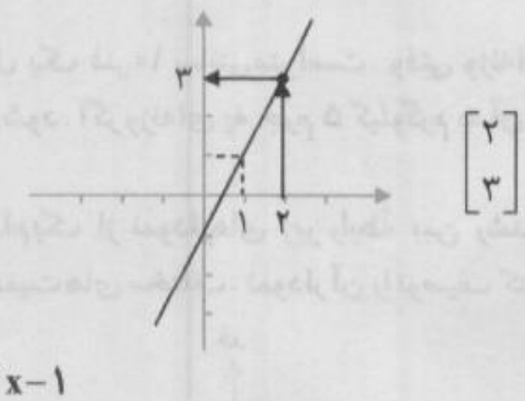
$y=\frac{۱}{۳}x \Rightarrow \begin{bmatrix}-۳\\-۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۶\\۲\end{bmatrix}$ $y=-x \Rightarrow \begin{bmatrix}۲\\-۲\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۳\\-۳\end{bmatrix}$ $y=۲x \Rightarrow \begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-۲\\-۴\end{bmatrix}$

۳- در قسمت (ب) کدام یک از نقطه‌ها با مختصات $\begin{bmatrix}۶\\۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۶\\۳\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۶۰\\۲۰\end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد؟ نقاط $\begin{bmatrix}۶\\۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۶۰\\۲۰\end{bmatrix}$

کار در کلاس ۱۰۰

۱- مختصات نقطه‌ای به طول ۲ را روی $y=۲x-۱$ پیدا کنید.

با استفاده از نمودار خط



$\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$

با استفاده از معادلهٔ خط

$y=۲x-۱$

$\downarrow$

$y=۲\times۲-۱=۴-۱=۳$

$x=۲ \Rightarrow y=۳ \Rightarrow \begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$

۲- مختصات نقطه‌ای به عرض ۳- را روی خط $y=-\frac{۱}{۲}x+۲$ پیدا کنید.

$y=-۳ \Rightarrow -۳=-\frac{۱}{۲}x+۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x=-۵ \Rightarrow x=۱۰$

BIAMOZ.com

۳- مختصات محل برخورد خط $y=5x+1$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

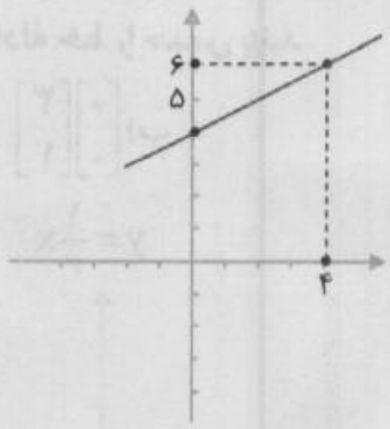
$\Rightarrow$ محل برخورد با محور xها $\Rightarrow$ عرض $=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0=5x+1 \Rightarrow x=\frac{-1}{5} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ محل برخورد با محور y ها $\Rightarrow$ طول $=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=5\times0+1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

تمرین ۱۰۰

۱- خط به معادله $y=\frac{1}{2}x+4$ را رسم کنید.



$$y=\frac{1}{2}x+4 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 4 & 6 \end{array}$$

الف) آیا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است. خیر.

$$y=\frac{1}{2}x+4 \xrightarrow{x=2} y=\frac{1}{2}\times2+4=1+4=5 \Rightarrow y=5$$

وقتی طول ۲ است عرض ۵ باید باشد. بنابراین نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار ندارد.

ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات را پیدا کنید.

نقطه برخورد با محور xها $\Rightarrow y=0 \Rightarrow 0=\frac{1}{2}x+4 \Rightarrow x=-8 \Rightarrow \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$

نقطه برخورد با محور yها $\Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\times0+4 \Rightarrow y=4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

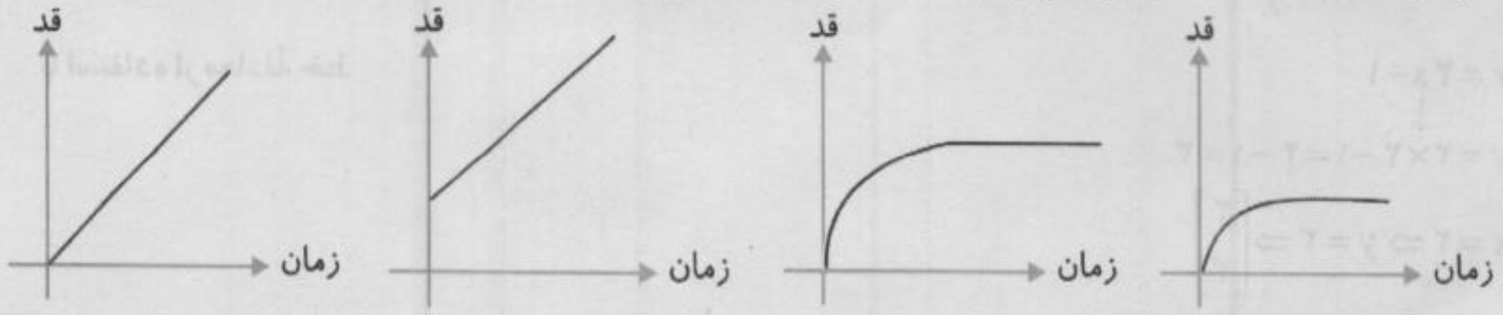
ج) نقطه‌ای از خط به طول ۱- پیدا کنید.

$$x=-1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\times(-1)+4 \Rightarrow y=\frac{-1}{2}+4 \Rightarrow y=\frac{7}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

۲- طول یک فنر ۱۰ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه $y=0/8x+10$ پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟

$$x=5 \Rightarrow y=0/8\times5+10 \Rightarrow y=4+10=14\,cm$$

۳- کدام‌یک از نمودارهای زیر رابطهٔ بین رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟ با توجه به وضعیت‌های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور y به چه معنا است.



نمودار دوم از سمت راست- محل برخورد این نمودار با محور yها بیانگر قد نوزاد در بدو تولد است. همچنین طبق این نمودار رشد قد انسان در سال‌های اولیه زندگی سرعت زیادی دارد. اما پس از مدتی این رشد متوقف می‌شود.

BIAMOZ.com

۴- دو نقطه از یک خط داده شده است؛ معادلهٔ خط را حدس بزنید.

الف) $\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ $y=۳x$

ب) $\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ $y=۲x-۱$

ج) $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\۴\end{bmatrix}$ $y=۳x+۱$

۵- مختصات محل برخورد خط به معادله‌ی $y=-x+۲$ را با محورهای مختصات بیابید.

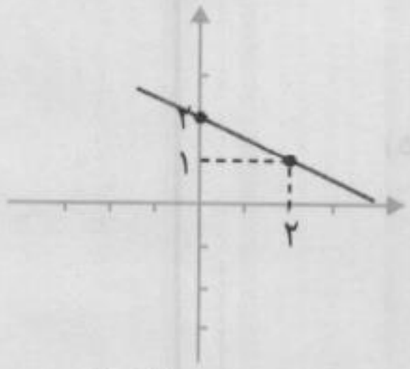
محل برخورد با محور عرض‌ها $x=۰\Rightarrow y=-(۰)+۲=۲\Rightarrow\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}$

محل برخورد با محور طول‌ها $y=۰\Rightarrow -x+۲\Rightarrow x=۲\Rightarrow\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}$

۶- مختصات نقطه‌ای از خط به معادله‌ی $y=\frac{-۳}{۵}x+۴$ را بیابید، که طول آن نقطه ۵ باشد.

$$x=۵\Rightarrow y=-\frac{۳}{۵}\times۵+۴\Rightarrow y=-۳+۴=۱\Rightarrow\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}$$

۷- خط $y=-\frac{۱}{۲}x+۲$ را رسم کنید. آیا نقطه $\begin{bmatrix}-۲\\۳\end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول ۱- از این خط را پیدا کنید.



$$y=-\frac{۱}{۲}x+۲\Rightarrow\begin{array}{c|cc}x&۰&۲\\\hline y&۲&۱\end{array}$$

$y=-\frac{۱}{۲}x+۲\xrightarrow{\begin{bmatrix}-۲\\۳\end{bmatrix}}۳=\frac{-۱}{۲}\times(-۲)+۲\Rightarrow ۳=۳\Rightarrow$ قرار دارد.

$$x=-۱\Rightarrow y=\frac{-۱}{۲}\times(-۱)+۲=\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\begin{bmatrix}-۱\\\frac{۵}{۲}\end{bmatrix}$$

نقطه‌ای به عرض ۲- از این خط پیدا کنید.

$$y=-۲\Rightarrow -۲=\frac{-۱}{۲}x+۲\Rightarrow -۲-۲=-\frac{۱}{۲}x\Rightarrow -۴=\frac{-۱}{۲}x\Rightarrow x=۸\Rightarrow\begin{bmatrix}۸\\-۲\end{bmatrix}$$

محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$$y=\frac{-۱}{۲}x+۲\rightarrow\begin{cases}x=۰\Rightarrow y=۰+۲=۲\Rightarrow\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix} & \text{(محل برخورد با محور عرض‌ها)}\\ y=۰\Rightarrow ۰=\frac{-۱}{۲}x+۲\Rightarrow x=۴\Rightarrow\begin{bmatrix}۴\\۰\end{bmatrix} & \text{(محل برخورد با محور طول‌ها)}\end{cases}$$

ارزشیابی مستمر

۱- معادله دو مجهولی $۲x+y=۶$ چند پاسخ دارد؟ چرا؟ ۳ پاسخ برای آن بنویسید. (۱/۵ نمره)

۲- خط به معادله‌ی $y=۲x-۳$ را رسم کنید. (۱)

۳- معادلهٔ خطی بنویسید که از مبدأ مختصات و نقطه $\begin{bmatrix}-۲\\۳\end{bmatrix}$ بگذرد. (۱ نمره)

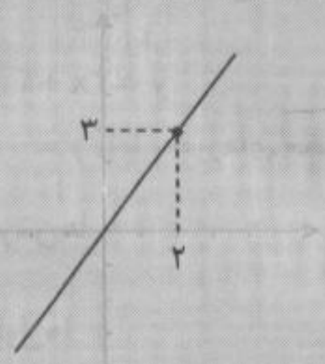
۴- آیا نقطه $\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}$ روی خط به معادله‌ی $y=۲x+۱$ قرار دارد؟ چرا؟ (۱)

۵- روی خط $۲x-۳y=۱$ نقطه‌ای را تعیین کنید که عرض آن ۱- باشد. (۱)

BIAMOZ.com

۶- مختصات محل برخورد نمودار خط $y = 2x - 4$ را با محورهای مختصات بیابید. (۱/۵)

۷- معادله‌ی خط مقابل را به‌دست آورید. (۲)



پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ بی‌شمار جواب دارد. زیرا برای هر مقدار دلخواهی برای x یک مقدار برای y می‌توان به‌دست آورد.

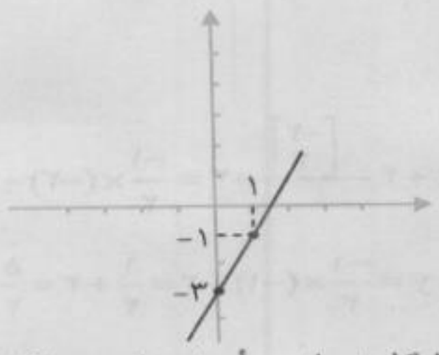
$x = ۱ \Rightarrow ۲\times۱ + y = ۶ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ (۰/۵)

$x = ۰ \Rightarrow ۲\times۰ + y = ۶ \Rightarrow y = ۶ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ \\ ۶ \end{bmatrix}$ (۰/۵)

$x = -۱ \Rightarrow ۲\times(-۱) + y = ۶ \Rightarrow y = ۶ + ۲ = ۸ \Rightarrow \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}$ (۰/۵)

۲

$y = ۲x - ۳ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & -۳ & -۱ \end{array}$ (۰/۵)



۳ هر خط گذرنده از مبدأ مختصات به شکل $y = ax$ است.

$y = ax \xrightarrow{\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}} ۳ = a\times(-۲) \Rightarrow a = \frac{-۳}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۳}{۲}x$ (۰/۵)

۴ بله این نقطه روی خط $y = ۲x + ۱$ قرار دارد. (۱) زیرا:

$y = ۲x + ۱ \xrightarrow{\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}} ۵ = ۲\times۲ + ۱ \Rightarrow ۵ = ۵$

۵ $۲x - ۳y = ۱ \xrightarrow{y=-۱} ۲x - ۳(-۱) = ۱ \Rightarrow ۲x + ۳ = ۱ \Rightarrow ۲x = -۲ \Rightarrow x = -۱$ (۰/۵)

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

۶

$y = ۲x - ۴ \Rightarrow \begin{cases} \text{محل برخورد با محور x}: & ۰ = ۲x - ۴ \Rightarrow x = ۲ \quad (۰/۷۵) \\ \text{محل برخورد با محور y}: & y = ۲\times۰ - ۴ \Rightarrow y = ۰ - ۴ \quad (۰/۷۵) \end{cases}$

۷ این خط از مبدا و نقطه $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ گذشته است. پس: (۰/۵)

$y = ax \xrightarrow[(۰/۵)]{\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}} ۳ = a\times۲ \Rightarrow a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x$
(۰/۵) (۰/۵)

BIAMOZ.com

۲ درس شیب خط و عرض از مبدأ

چکیده درس:

نکته ۵: هر گاه معادله یک خط را به شکل استاندارد $y = ax + b$ بنویسیم، ضریب x (یعنی a) را شیب خط می‌گوئیم. همچنین عدد b را که محل برخورد خط با محور عرض‌هاست عرض از مبدأ خط می‌نامیم.

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $2x - 3y = 12$ را تعیین کنید و نمودار خط را رسم کنید.

$$2x - 3y = 12 \Rightarrow -3y = -2x + 12$$
$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 4$$

$$\Rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{3} \text{ و عرض از مبدأ} = -4$$

x	۰	۶
y	−۴	۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۴ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۶ \\ ۰ \end{bmatrix}$



مثال: معادله خطی بنویسید که شیب آن ۲− باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بگذرد.

معادله کلی خط $y = ax + b$ است. چون شیب (۲−) است پس $a = -۲$.

$$\Rightarrow y = -۲x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}} ۳ = -۲\times ۰ + b \Rightarrow b = ۳$$
$$\Rightarrow y = -۲x + ۳$$

نکته ۶: هر گاه دو خط موازی باشند، شیب‌های آن دو با هم برابر است.

مثال: معادله خطی بنویسید که با خط $y = 2x - ۳$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بگذرد.

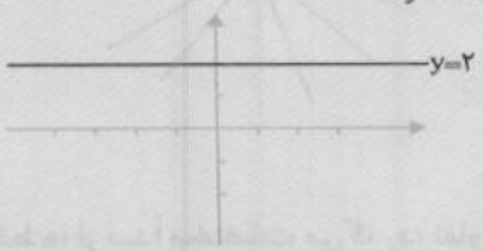
چون خط موردنظر با خط $y = ۲x - ۳$ موازی است پس شیب خط مورد نظر ۲ است. $(a = ۲)$

$$y = ۲x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}} ۳ = ۲\times ۱ + b \Rightarrow ۳ = ۲ + b \Rightarrow$$
$$b = ۱ \Rightarrow y = ۲x + ۱$$

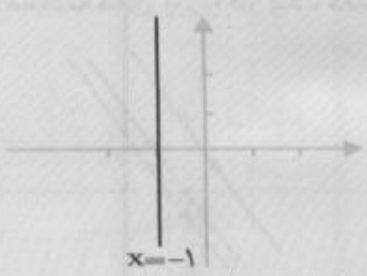
نکته ۷: خط‌هایی که موازی با محور xها باشند، دارای شیب صفر هستند و به شکل استاندارد $y = k$ هستند.

نکته ۸: خط‌هایی که موازی با محور yها باشند، شیب برایشان تعریف نشده است و به شکل $x = k$ هستند.

مثال: معادله خطی بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ بگذرد. $y = ۲$



مثال: معادله خطی بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$, بگذرد. $x = -۱$ $\begin{bmatrix} -۱ \\ \sqrt{۲} \end{bmatrix}$



نکته ۹: معادله خط نیم‌ساز ربع اول و ربع سوم $y = x$ است و معادلهٔ خط نیم‌ساز ربع دوم و ربع چهارم $y = -x$ است.

نکته ۱۰: اگر دو نقطه $\begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix}$ روی یک خط قرار داشته باشند، شیب آن خط از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\text{شیب خط} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه‌های $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$\text{شیب خط} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۲ - (-۱)}{۱ - ۳} = \frac{۳}{-۲} = -\frac{۳}{۲}$$

$$y = -\frac{۳}{۲}x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}} ۲ = -\frac{۳}{۲}\times ۱ + b \Rightarrow$$
$$b = \frac{۷}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۳}{۲}x + \frac{۷}{۲}$$

BIAMOZ.com

فعالیت

۱۰۲

۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

الف) $y=\frac{۱}{۲}x$

x	۰	۲
y	۰	۱

ب) $y=x$

x	۰	۱
y	۰	۱

ج) $y=۳x$

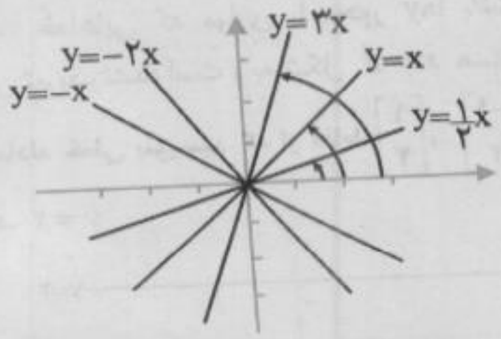
x	۰	۱
y	۰	۳

د) $y=-x$

x	۰	۱
y	۰	−۱

هـ) $y=-۲x$

x	۰	۱
y	۰	−۲



تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرد؛ تفاوت آن‌ها در چیست؟ زاویه هر خط را مانند نمونه با قسمت مثبت محور طول‌ها مشخص کنید. در خط‌های الف، ب و ج چه رابطه‌ای بین ضریب x و این زاویه وجود دارد؟ تفاوت آن‌ها در شیب آن‌ها (زاویه آنها با جهت مثبت محور xها) است. با تغییر ضریب x این زاویه نیز تغییر می‌کند.

خط‌های د و هـ چه نوع زاویه‌ای با جهت مثبت محور xها می‌سازد؟ زاویه منفرجه می‌سازند.

۲- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

$y=۲x+۳$

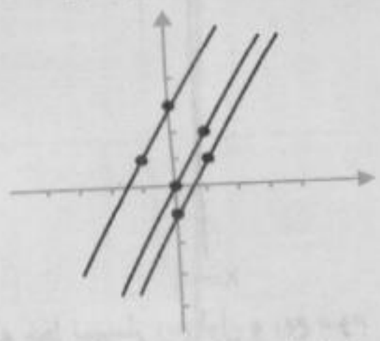
x	−۱	۰
y	۱	۳

$y=۲x$

x	۰	۱
y	۰	۲

$y=۲x-۱$

x	۰	۱
y	−۱	۱



در معادلهٔ این خط‌ها ضریب x برابر با ۲ است، که به آن شیب خط می‌گوییم. تفاوت خط‌ها در چیست؟ زاویهٔ خط‌ها را با محور x ها با هم مقایسه کنید؛ چرا این خط با هم موازی هستند؟ تفاوت خطها در محل برخورد خطها با محور عرض‌ها (y) است. دلیل موازی بودن این خطها این است که در هر سه خط ضریب x (شیب) برابر است.

بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد ثابت معادله چه رابطه‌ای می‌بینید؟ محل برخورد خط با محور عرض‌ها، همان عدد ثابتی است که در معادله خطها مشاهده می‌شود.

کار در کلاس

۱۰۳

۱- در هریک از معادله‌های زیر شیب و عرض از مبدأ خط را مشخص کنید.

$y=-۳x+۱$

شیب = −۳

عرض از مبدأ = +۱

$y=-\frac{۲}{۳}x$

شیب $=\frac{-۲}{۳}$

عرض از مبدأ = صفر

$y=۲x-۴$

شیب = ۲

عرض از مبدأ = −۴

۲- معادله خطی بنویسید که:

الف) شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۱- باشد. $y=-۲x-۱$

ب) شیب آن $\frac{۱}{۲}$ باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند. $y=\frac{۱}{۲}x+۳$

ج) با خط $y=۲x+۱$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix}$ بگذرد. $y=۲x+۴$

BIAMOZ.com

۳- معادله خطی بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ بگذرد.

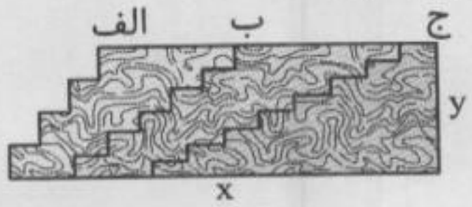
معادله خط $\rightarrow y = ۲x$

$y = ax + b \rightarrow y = ۲x + b \rightarrow ۲ = ۲\times۱ + b \rightarrow b = ۰$

(a: ۲، y: ۲، x: ۱)

فعالیت ۱۰۳

۱- در این تصویر مقابل سه نوع راه‌پله می‌بینید: در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می‌روید یکسان است.



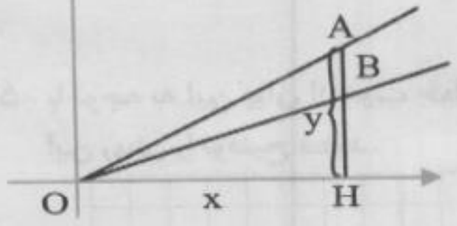
کدم راه‌پله شیب بیشتری دارد؟ راه پله سمت چپ (الف)

کدام یک تعداد پله بیشتری دارد؟ راه پله سمت راست (ج)

بالا رفتن از کدام یک راحت‌تر است؟ راه‌پله سمت راست. (ج)

۲- درمحورهای مختصات مقابل، کدام خط شیب بیشتری دارد؟ خط بالایی (OA)

نقطه‌های A و B طول ثابتی دارند ولی عرض آن‌ها متفاوت است.



کدام‌یک از دو نسبت زیر بزرگ‌تر است؟ چرا؟ این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خط‌ها دارد؟ $\frac{AH}{OH} > \frac{BH}{OH}$

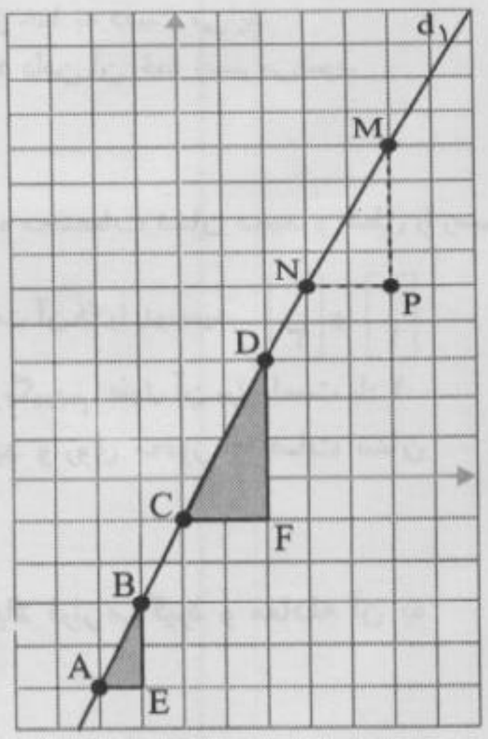
چون مقدار AH از BH بیشتر است و مخرج‌ها مساوی است، کسر مربوط به خطی که شیب بیشتری دارد بزرگ‌تر است. این دو نسبت همان شیب خط‌ها هستند.

۳- روی خط $d_۱$ به معادله $y = ۲x - ۱$ دو نقطهٔ دلخواه مثل A و B در نظر گرفته‌ایم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ ایجاد شده، شیب خط را به‌دست آورده‌ایم. شیب خط $d_۱ = \frac{EB}{EA} = \frac{۲}{۱} = ۲$

برای دو نقطه C و D نیز باتوجه به مثلث رسم شده، شیب خط را پیدا کنید. شیب خط $d_۱ = \frac{DF}{CF} = \frac{۴}{۲} = ۲$

دو نقطه دلخواه دیگر روی خط در نظر بگیرید و با رسم یک مثلث قائم الزاویه شیب خط را دوباره پیدا کنید.

شیب خط $d_۱ = \frac{MP}{PN} = \frac{۴}{۲} = ۲$

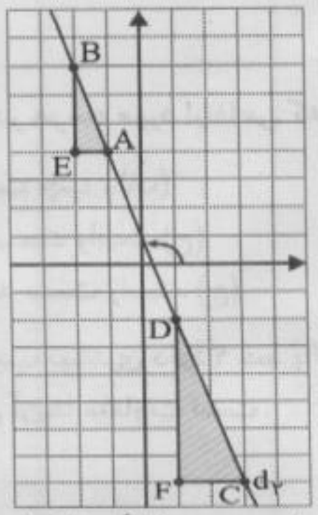


BIAMOZ.com

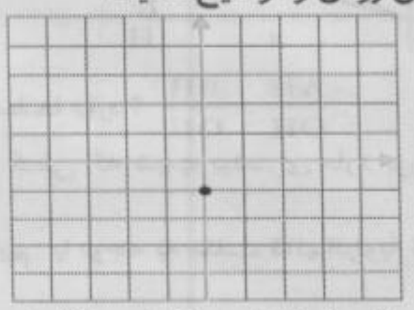
۴- خط d_2 با محور طول، زاویه بزرگتر از 90° می‌سازد؛ پس شیب خط منفی می‌شود. باتوجه به مثلث‌های رسم شده مقدار شیب خط d_2 را پیدا کنید.

شیب خط $d_2 = -\frac{EB}{EA} = -\frac{3}{1} = -3$

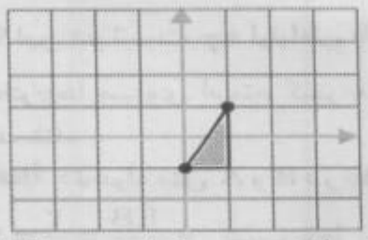
خط d_2 محور عرض‌ها را در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ قطع کرده است یا عرض از مبدأ آن ۱ است. معادله خط d_2 را بنویسید. $y = -3x + 1$



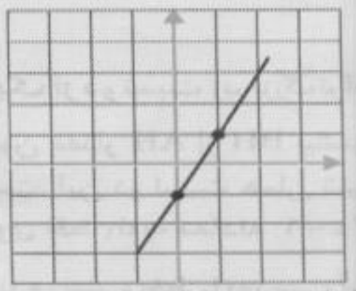
۵- با توجه به این بیان از شیب خط در زیر مراحل رسم معادلهٔ خط $y = 2x - 1$ با روش دیگری مشخص شده است: این روش را توضیح دهید.



۱- خط از این نقطه می‌گذرد



۲- با توجه به مقدار شیب نقطهٔ دیگر پیدا می‌شود



۳- با داشتن دو نقطه خط رسم می‌شود

۱- ابتدا با توجه به عرض از مبدأ خط داده شده که عدد (۱-) است این عدد را روی محور عرض‌ها مشخص می‌کنیم.

۲- حال چون شیب خط $\frac{2}{1}$ است. به ازای هر یک واحد که به سمت راست برویم می‌بایست ۲ واحد به بالا حرکت کنیم. به این ترتیب نقطهٔ دیگری از خط به دست می‌آید.

۳- با وصل کردن این دو نقطه و امتداد دادن آن خط رسم می‌شود.

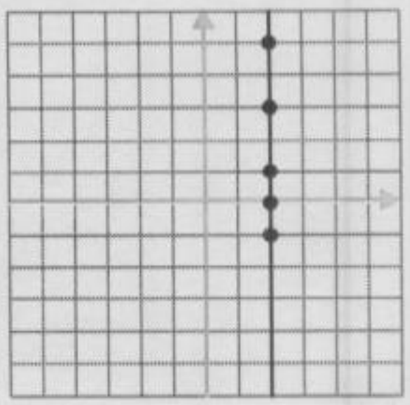
فعالیت ۱۰۵

۱- نقطه‌های $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات نشان دهید و خطی را رسم کنید که از این دو نقطه می‌گذرد. روی خط، دو نقطه انتخاب کنید و مختصات آن‌ها را بنویسید. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

اگر نقطه دیگری روی این خط در نظر بگیریم، طول آن برابر است با: ۲

یک نقطه دلخواه به طول ۲ بنویسید و روی محور مختصات نشان دهید: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

تمام نقطه‌ها به طول ۲ روی خط بالا قرار می‌گیرد و معادله آن به صورت $x = 2$ است.



BIAMOZ.com

۲- صورت کلی معادله‌های خطی به صورت $ax+by=c$ است.

الف) با توجه به مقدارهای نوشته شده، معادله خط را بنویسید؛ کدام خط از مبدأ می‌گذرد؟

$a=۲\ ,\ b=۳\ ,\ c=۴ \rightarrow ۲x+۳y=۴$

$a=-۱\ ,\ b=۲\ ,\ c=۰ \rightarrow -x+۲y=۰$

خط $-x+۲y=۰$ از مبدا می‌گذرد.

ب) با توجه به خط‌های داده شده، مقدارهای a، b و c را پیدا کنید.

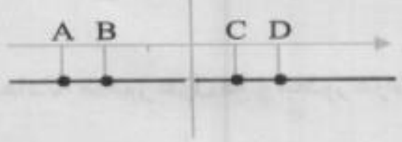
$-۳x+۲y=۲ \rightarrow a=-۳\ ,\ b=۲\ ,\ c=+۲$

$y=۲x+۱ \rightarrow ۲x-y=-۱ \rightarrow a=۲\ ,\ b=-۱\ ,\ c=-۱$

ج) برای خط $x=۲$ مقدارهای a، b و c را بنویسید.

$$\begin{matrix} ax+by=c & \rightarrow & x=۲ \\ \downarrow\ \ \downarrow & & \downarrow \\ ۱\ \ ۰ & & ۲ \end{matrix} \Rightarrow a=۱\ ,\ b=۰\ \ c=۲$$

۳- مختصات نقطه‌های مشخص شده را روی خط بنویسید.



$$A=\begin{bmatrix}-۳\\-۱\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}$$

این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ عرض همهٔ این نقاط -۱ است.

معادله خط رسم شده را بنویسید. $y=-۱$

در فرم کلی معادله‌های خطی به جای a، b و c چه عددهایی قرار دهیم تا معادلهٔ خطِ رسم شده به‌دست آید؟

$$\begin{matrix} ax+by=c \\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\ ۰\ \ ۱\ \ -۱ \end{matrix}$$

۴- مانند نمونه برای خط‌های داده شده شیب و عرض از مبدأ را پیدا کنید.

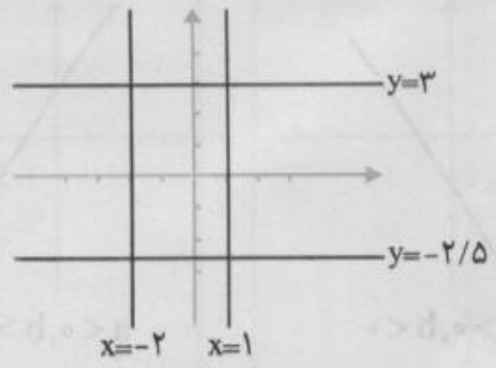
$$۲y-۴x=۸ \rightarrow ۲y=۴x+۸ \rightarrow y=\frac{۴}{۲}x+\frac{۸}{۲} \rightarrow y=\underset{\text{شیب}}{۲x}+\underset{\text{عرض از مبدأ}}{۴}$$

$$۳x-۲y=۶ \Rightarrow -۲y=-۳x+۶ \rightarrow y=\frac{۳}{۲}x-۳ \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب}=\frac{۳}{۲} \\ \text{عرض از مبدأ}=-۳ \end{cases}$$

$$x+۳y-۹=۰ \Rightarrow ۳y=-x+۹ \rightarrow y=-\frac{x}{۳}+۳ \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب}=-\frac{۱}{۳} \\ \text{عرض از مبدأ}=۳ \end{cases}$$

کار در کلاس

۱- معادله‌های خط‌های رسم شده را در دستگاه مختصات مقابل کنار هر کدام بنویسید.



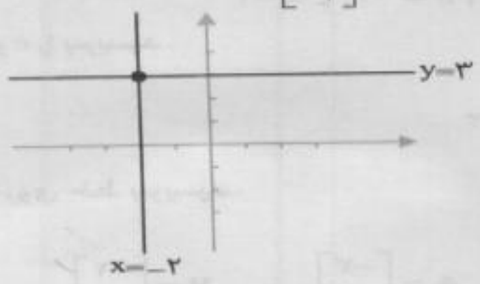
BIAMOZ.com

۲- از برخورد دو خط $y=-۳$ و $x=۲$ کدام نقطه به دست می‌آید؟ نقطه $\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید.

۳- معادله خطی بنویسید که موازی محور xها باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$ بگذرد. $y=۱$

تمرین ۱۰۶

۱- خط‌های به معادلهٔ $y=۳$ و $x=-۲$ را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه بین این دو خط چند درجه است؟ محل برخورد دو خط نقطه $\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ است و زاویه بین آنها ۹۰ درجه است.



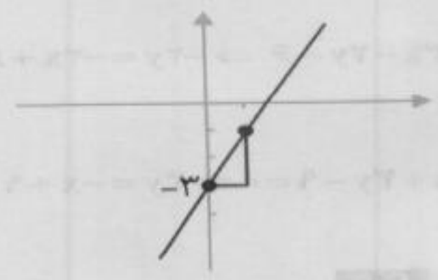
۲- معادلهٔ محور طول‌ها و محور عرض‌ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه‌ای است؟

معادله محور طول $\Rightarrow y=۰$
معادله محور عرض $\Rightarrow x=۰$
$\Rightarrow$ محل برخورد $=$ مبدأ مختصات $=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$

۳- شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا و سپس آن خط‌ها را رسم کنید.

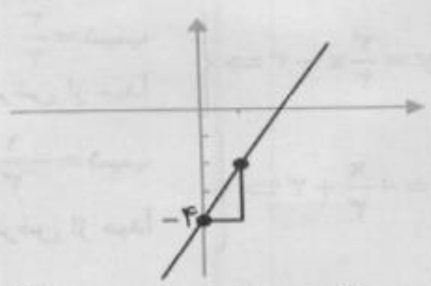
$۲x-y=۳$
$-y=-۲x+۳$
$y=۲x-۳$

شیب $=۲$
عرض از مبدأ $=-۳$



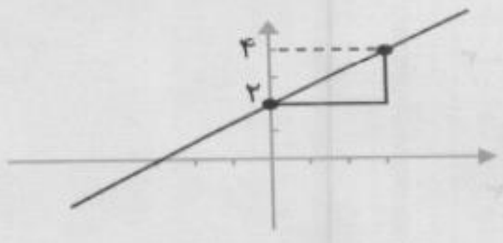
$۴x-۲y=۸$
$-۲y=-۴x+۸$
$y=۲x-۴$

شیب $=۲$
عرض از مبدأ $=-۴$

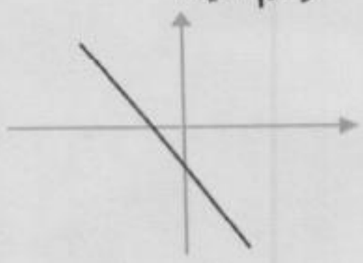


$۳y-۲x=۶$
$۳y=۲x+۶$
$y=\frac{۲}{۳}x+۲$

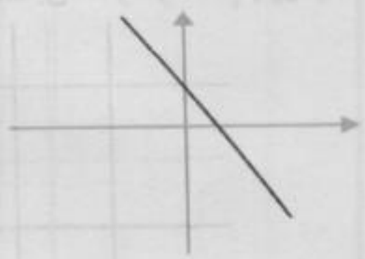
شیب $=\frac{۲}{۳}$
عرض از مبدأ $=۲$



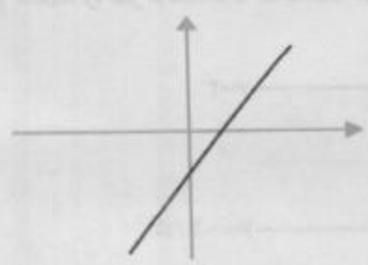
۴- خط $y=ax+b$ را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.



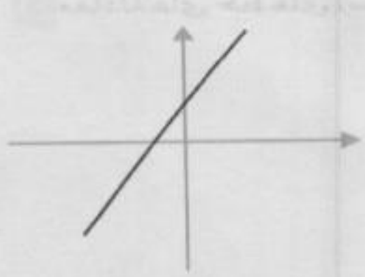
$a<۰, b<۰$



$a<۰, b>۰$



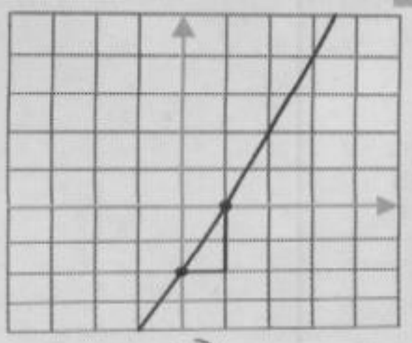
$a>۰, b<۰$



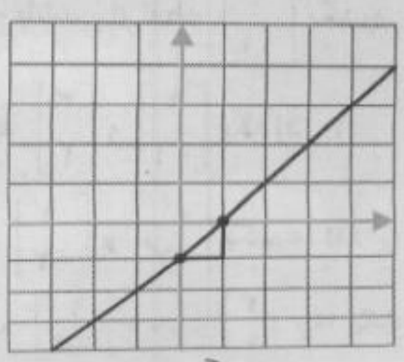
$a>۰, b>۰$

BIAMOZ.com

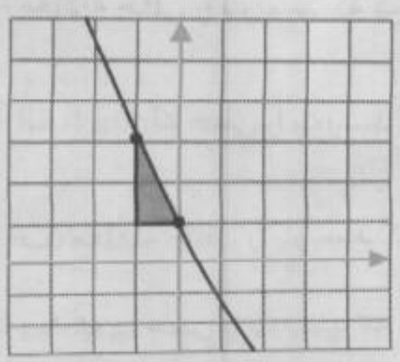
۵- معادله خط‌های، زیر را بنویسید.



$\left.\begin{matrix}\text{شیب}=۲\\ \text{عرض از مبدأ}=-۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=۲x-۲$



$\left.\begin{matrix}\text{شیب}=۱\\ \text{عرض از مبدأ}=-۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=x-۱$



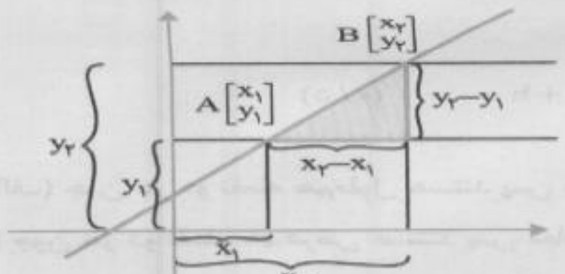
$\left.\begin{matrix}\text{شیب}=-۲\\ \text{عرض از مبدأ}=۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=-۲x+۱$

۶- معادله خطی بنویسید که با خط $۲y-۴x=۵$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}$ بگذرد.

$$۲y-۴x=۵\Rightarrow ۲y=۴x+۵\Rightarrow y=۲x+\frac{۵}{۲}\Rightarrow \text{شیب}=۲$$

$$\text{معادله خط}\rightarrow y=\underset{\downarrow ۲}{a}x+b\Rightarrow \underset{\downarrow -۱}{y}=۲\underset{\downarrow ۱}{x}+b\Rightarrow -۱=۲+b\Rightarrow b=-۳\Rightarrow y=۲x-۳$$

۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید:



$$\text{شیب خط}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

با توجه به شکل دو نقطهٔ A و B روی خط قرار دارند. مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن AB باشد، دارای دو ضلع زاویه قائمه به طول‌های $(y_۲-y_۱)$ و $(x_۲-x_۱)$ است. بنابراین داریم:

$$\text{شیب خط}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

۸- $\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۴\\-۱\end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادله خط را بنویسید.

$$\text{شیب } a=\frac{۲-(-۱)}{۳-۴}=\frac{۳}{-۱}=-۳\Rightarrow \text{طبق فرمول سؤال قبل}$$

$$\text{معادله خط}\Rightarrow y=\underset{\downarrow -۳}{a}x+b\Rightarrow \underset{\downarrow ۲}{y}=-۳\underset{\downarrow ۳}{x}+b\Rightarrow ۲=-۹+b\Rightarrow b=۱۱\Rightarrow y=-۳x+۱۱$$

ارزشیابی مستمر

۱- شیب و عرض از مبدا خط $۳y-۲x=۶$ را بیابید. (۱ نمره)

۲- معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۲- و عرض از مبدا آن ۱ باشد. (۱)

۳- مقدار m را طوری تعیین کنید که خط $۳y-x=m$ از نقطه $\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}$ بگذرد. (۱)

BIAMOZ.com

۴- معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۲- باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}-۲\\۱\end{bmatrix}$ بگذرد. (۲)

۵- الف) معادله خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}$ بگذرد. (۱)

ب) معادله خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۰\\-۲\end{bmatrix}$ بگذرد. (۱)

۶- معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه $A=\begin{bmatrix}۱\\-۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$ بگذرد. (۲)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ $۳y-۲x=۶ \Rightarrow ۳y=۲x+۶ \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+۲$ (۰/۵)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = \frac{۲}{۳} & (۰/۲۵) \\ \text{عرض از مبدأ} = ۲ & (۰/۲۵) \end{cases}$$

۲ $y=ax+b \xrightarrow[(۰/۵)]{a=-۲} y=-۲x+۱ \xrightarrow[b=۱]{} y=-۲x+۱$ (۰/۵)

۳ $۳y-x=m \xrightarrow{\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}} ۳\times(-۲)-۱=m \Rightarrow m=-۷$ (۰/۵) (۰/۵)

۴ $y=ax+b \xrightarrow[(۰/۵)]{a=-۲} y=-۲x+b \xrightarrow{\begin{bmatrix}-۲\\۱\end{bmatrix}} ۱=(-۲)\times(-۲)+b$ (۰/۵)

$\rightarrow b=+۵$ (۰/۵) $\Rightarrow y=-۲x+۵$ (۰/۵)

۵ الف) چون هر دو نقطه هم‌طول هستند پس معادله خط به شکل $x=۳$ است. (۱)

ب) چون هر دو نقطه هم‌عرض هستند پس معادله خط به شکل $y=-۲$ است. (۱)

۶ شیب خط $=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{-۳-۱}{۱-۳}=\frac{-۴}{-۱}=۴$ (۱)

$\Rightarrow y=۴x+b \xrightarrow{\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}} ۱=۴\times۲+b$ (۰/۵)

$\Rightarrow b=-۷ \Rightarrow y=۴x-۷$ (۰/۵)

۳ درس دستگاه معادله‌های خطی

پیچیده درس

نکته ۱۱: دو خط یا با یکدیگر موازی‌اند یا اینکه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. اگر دو خط موازی باشند و عرض از مبدأ آنها یکی باشد می‌گوییم این دو خط بر هم منطبق هستند. اگر دو خط بر هم منطبق باشند در بی‌شمار نقطه اشتراک دارند. دو خط موازی و غیرمنطبق در هیچ نقطه‌ای اشتراک ندارند و دو خط متقاطع تنها در یک نقطه مشترک‌اند.

نکته ۱۲: هرگاه به دنبال جواب مشترکی برای دو یا چند معادله باشیم، می‌گوییم می‌خواهیم دستگاه متشکل از آن معادلات را حل کنیم. یکی از روش‌های حل دستگاه معادلات خطی رسم نمودارها و یافتن نقاط تقاطع آنها است.

مثال: با رسم نمودارهای دو خط زیر، جواب مشترک آنها را بیابید.

$d_۱: y=۲x+۱$

x	۰	−۱
y	۱	−۱

$d_۲: ۳x-y=۰$

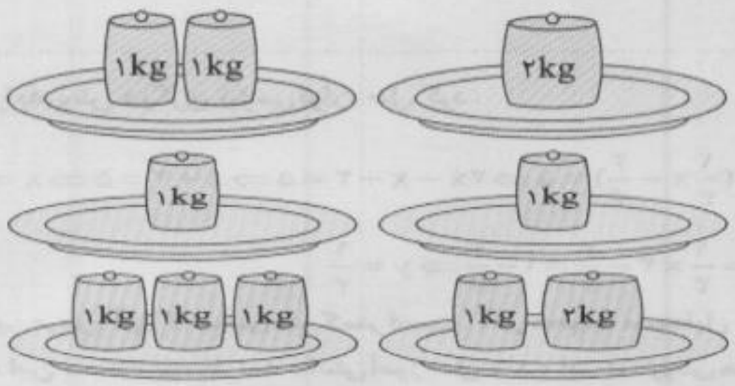
x	۰	۱
y	۰	۳

BIAMOZ.com

۲- به مثال‌های زیر توجه کنید:

الف) $\begin{array}{r} ۲=۲ \\ +\ ۵=۵ \\ \hline ۷=۷ \end{array}$ ب) $\begin{array}{r} x=x \\ +\ ۲x=۲x \\ \hline ۳x=۳x \end{array}$

ج)



از این مثال‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم، یک تساوی جدید به دست می‌آید.

۳- با توجه به نتیجه‌هایی که از سؤال‌های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله‌های زیر حل شده است. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است.

الف) $\begin{array}{r} \begin{cases} x-y=۱ \\ x+y=۳ \end{cases} \\ \hline ۲x=۴ \end{array}$

$\boxed{x=۲}$ $\quad x+y=۳$

$۲+y=۳ \rightarrow \boxed{y=۱} \Rightarrow$ جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

در حل این دستگاه از این نکته استفاده شده است که اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم، تساوی همچنان برقرار است.

ب) $۲\times\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ x+۲y=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} ۴x-۲y=۶ \\ x+۲y=۴ \end{cases} \\ \hline ۵x=۱۰ \end{array}$

$\boxed{x=۲}$ و $x+۲y=۴$

$۲+۲y=۴$

$۲y=۲ \Rightarrow \boxed{y=۱} \Rightarrow$ جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

در حل این دستگاه ابتدا طبق نکته اول ضرایب معادله اول را در ۲ ضرب کرده‌ایم. سپس دو طرف دو تساوی را طبق نکته دوم با هم جمع کرده‌ایم.

۱۱۰ کار در کلاس

دستگاه‌های معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

۱) $(-۴)\times\begin{cases} x-y=۳ \\ ۴x-۲y=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۴x+۴y=-۱۲ \\ ۴x-۲y=۶ \end{cases}$

$۲y=-۶ \Rightarrow \boxed{y=-۳}$ $x-y=۳ \Rightarrow x-(-۳)=۳ \Rightarrow \boxed{x=۰}$

۲) $\begin{array}{l} (-۲)\times \\ (۳)\times \end{array}\begin{cases} ۳x-۵y=۱ \\ ۲x+۳y=۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۶x+۱۰y=-۲ \\ ۶x+۹y=۲۱ \end{cases}$

$۱۹y=۱۹ \Rightarrow \boxed{y=۱} \Rightarrow ۲x+۳y=۷$, $\Rightarrow ۲x+۳=۷ \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow \boxed{x=۲}$

BIAMOZ.com

۳) $(-۱)\times\begin{cases}۳x+۲y=۵۰\\ ۲x+۲y=۳۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۳x-۲y=-۵۰\\ ۲x+۲y=۳۵\end{cases}$

$-x=-۱۵\Rightarrow\boxed{x=۱۵}$ ، $\Rightarrow ۲x+۲y=۳۵\Rightarrow ۳۰+۲y=۳۵\Rightarrow ۲y=۵\Rightarrow\boxed{y=\frac{۵}{۲}}$

فعالیت

۱۱۱

۱- دستگاه معادله‌های خطی زیر را به‌روش دیگری نیز می‌توان حل کرد.

$$\begin{cases}۲x-۳y=۵\\ y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow ۲x-۳(\frac{۱}{۳}x-\frac{۲}{۳})=۵\Rightarrow ۲x-x+۲=۵\Rightarrow x+۲=۵\Rightarrow x=۳$$

$$y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۲}{۳}\xrightarrow{x=۳}y=\frac{۱}{۳}\times ۳-\frac{۲}{۳}=۱-\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}$$

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی‌متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش‌آموز حل شده است. روش‌های هر کدام را توضیح داده، کامل کنید.

روش ۱: **$۲x-۳$: طول مستطیل و x: عرض مستطیل**

محیط $=۲(x+۲x-۳)=۲۴\Rightarrow ۲x+۴x-۶=۲۴\Rightarrow ۶x-۶=۲۴$

طول $=۲x-۳=۲\times ۵-۳=۷$ ، عرض: $۶x=۳۰\Rightarrow x=۵$

روش ۲: **y : طول مستطیل و x: عرض مستطیل**

$$\begin{cases}y=۲x-۳\\ ۲(x+y)=۲۴\end{cases}\rightarrow -\begin{cases}۲x-y=۳\\ ۲x+۲y=۲۴\end{cases}$$

طول $\Rightarrow ۲x-۳=۷\Rightarrow x=۵$

عرض $-y-۲y=۳-۲۴\Rightarrow y=۷\Rightarrow -۳y=-۲۱$

روش ۳: **y:طول مستطیل و x: عرض مستطیل**

طول $=۲x-۳=۲\times ۵-۳=۷\Rightarrow y=۷$

$$\begin{cases}y=۲x-۳\\ ۲(x+y)=۲۴\rightarrow ۲(x+۲x-۳)=۲۴\rightarrow ۲x+۴x-۶=۲۴\end{cases}$$

عرض $\Rightarrow ۶x-۶=۲۴\Rightarrow ۶x=۳۰\Rightarrow x=۵$

بین روش‌های اول و سوم چه شباهتی هست؟ در هر دو روش از جایگزینی متغیر در یکی از معادله‌ها استفاده شده است.

کار در کلاس

۱۱۲

دستگاه‌های زیر را به روش جایگزینی حل کنید.

۱) $\begin{cases}x-۳y=۷\\ ۲x-۷y=۱۵\end{cases}$

$\Rightarrow x=۳y+۷$

$\Rightarrow ۲(۳y+۷)-۷y=۱۵\Rightarrow ۶y+۱۴-۷y=۱۵$

$\Rightarrow ۶y-۷y=۱۵-۱۴\Rightarrow -y=۱\Rightarrow y=-۱$

$\Rightarrow x=۳y+۷\xrightarrow{y=-۱}x=۳\times(-۱)+۷=۴\Rightarrow x=۴$

۲) $\begin{cases}۳x-y=۶\\ ۲x+\frac{۱}{۳}y=۸\end{cases}$

$\Rightarrow y=۳x-۶$

$\Rightarrow ۲x+\frac{۱}{۳}(۳x-۶)=۸\Rightarrow ۲x+x-۲=۸$

$\Rightarrow ۳x-۲=۸\Rightarrow ۳x=۱۰\Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}$

$\Rightarrow y=۳x-۶\xrightarrow{x=\frac{۱۰}{۳}}y=۳\times\frac{۱۰}{۳}-۶=۴\Rightarrow y=۴$

BIAMOZ.com

تمرین

۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

۱) $\begin{cases}۲(x-y)+۳y=۴\\۳x-۲(۲x-y)=۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x-۲y+۳y=۴\\۳x-۴x+۲y=۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x+y=۴\\-x+۲y=۷\end{cases}$

$۲\times\begin{cases}۲x+y=۴\\-x+۲y=۷\end{cases}\Rightarrow+\begin{cases}۲x+y=۴\\-۲x+۴y=۱۴\end{cases}$

$۵y=۱۸\Rightarrow\boxed{y=\frac{۱۸}{۵}}\Rightarrow ۲x+\frac{۱۸}{۵}=۴\Rightarrow ۲x=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\boxed{x=\frac{۱}{۵}}$

۲) $۶\times\begin{cases}\frac{x-۱}{۲}-\frac{y-۱}{۳}=\frac{۱}{۶}\\x+y=۴\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}۳(x-۱)-۲(y-۱)=۱\\x+y=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳x-۲y=۲\\x+y=۴\end{cases}$

$۲\times\begin{cases}۳x-۲y=۲\\x+y=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳x-۲y=۲\\۲x+۲y=۸\end{cases}$

$۵x=۱۰\Rightarrow\boxed{x=۲}\qquad ۲+y=۴\Rightarrow\boxed{y=۲}$

۲- یک جواب برای x و y طوری تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

$۲^{۲x-y-۲}=۳^{x+y-۱}$

این تساوی زمانی برقرار است که توان‌های دو عدد ۲ و ۳ در دو طرف تساوی صفر باشد. چراکه در این صورت حاصل دو طرف تساوی برابر با یک می‌شوند.

$\begin{cases}۲x-y-۲=۰\\x+y-۱=۰\end{cases}\Rightarrow+\begin{cases}۲x-\cancel{y}=۲\\x+\cancel{y}=۱\end{cases}$

$۳x=۳\Rightarrow\boxed{x=۱}$

$\Rightarrow x+y-۱=۰\xrightarrow{x=۱}۱+y-۱=۰\Rightarrow y=۰$

۳- معادله خطی بنویسید که از محل برخورد دو خط $x-y=۱$ و $x+y=۱$ بگذرد و شیب آن $-\frac{۲}{۳}$ باشد.

ابتدا محل برخورد دو خط داده شده را می‌یابیم.

$+\begin{cases}x+\cancel{y}=۱\\x-\cancel{y}=۱\end{cases}$

$۲x=۲\Rightarrow\boxed{x=۱}\Rightarrow ۱+y=۱\Rightarrow\boxed{y=۰}\Rightarrow\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$ نقطه برخورد

معادله خط: $y=ax+b, a=-\frac{۲}{۳}, x=۱, y=۰\Rightarrow ۰=\frac{-۲}{۳}+b\Rightarrow b=\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=\frac{-۲}{۳}x+\frac{۲}{۳}$

۴- در معادله $y=ax+۱$ اگر به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، معادلهٔ خط‌های زیادی به‌دست می‌اید. به ازای $a=۱$ و $a=۲$ و $a=-۱$ این خط‌ها را رسم کنید؛ این خطوط چه ویژگی مشترکی دارد؟

$a=۱\Rightarrow y=x+۱\Rightarrow$

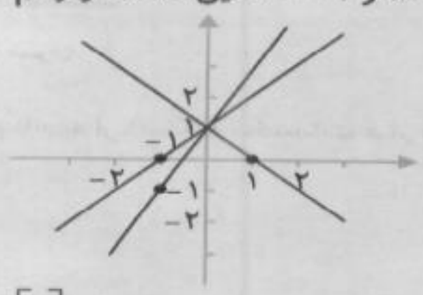
x	۰	−۱
y	۱	۰

$a=۲\Rightarrow y=۲x+۱\Rightarrow$

x	۰	−۱
y	۱	−۱

$a=-۱\Rightarrow y=-x+۱\Rightarrow$

x	۰	۱
y	۱	۰



ویژگی مشترک: همه‌ی این خط‌ها از نقطه $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ می‌گذرند.

BIAMOZ.com

۵- در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد.)

y:تعداد شترمرغ‌ها x:تعداد گاوها

$$-2\times\begin{cases}x+y=20\\4x+2y=56\end{cases}\Rightarrow+\begin{cases}-2x-2y=-40\\4x+2y=56\end{cases}$$

$$2x=16\Rightarrow x=8\ ,\quad x+y=20\xrightarrow{x=8}8+y=20\Rightarrow y=12$$

در این مزرعه ۱۲ شترمرغ و ۸ گاو وجود دارد.

۶- دستگاه معادله خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.
آیا این دستگاه جواب دارد؟

$$-2\times\begin{cases}2x-3y=7\\4x-6y=5\end{cases}\Rightarrow+\begin{cases}-4x+6y=-14\\4x-6y=5\end{cases}$$

روش حذفی:

$0=-9\Rightarrow$ نادرست $\Rightarrow$ جواب ندارد

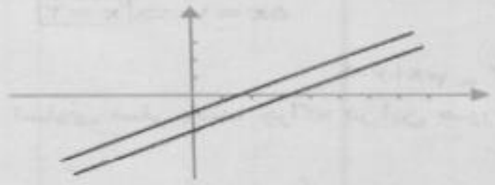
روش ترسیمی:

$2x-3y=7\Rightarrow$

x	۲	۸
y	−۱	۳

$4x-6y=5\Rightarrow$

x	۰	$\frac{5}{4}$
y	$\frac{-5}{6}$	۰



طبق نمودار مشخص است که دو خط نقطه مشترکی ندارند. پس دستگاه جواب ندارد.

شیب هردو خط را به دست آورید. توضیح دهید که چرا نقطهٔ مشترکی به‌عنوان جواب معادله به‌دست نمی‌آید.

$$2x-3y=7\rightarrow-3y=-2x+7\rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\rightarrow \text{شیب}=\frac{2}{3}$$

$$4x-6y=5\rightarrow-6y=-4x+5\rightarrow y=\frac{4}{6}x-\frac{5}{6}\rightarrow \text{شیب}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

چون شیب دو خط با هم برابر است پس دو خط موازی‌اند و دو خط موازی هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. پس نقطه مشترکی هم ندارند.

۷- مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال است و اختلاف سن آنها ۲۶ سال است سن هریک را با تشکیل دستگاه معادلات به‌دست آورید.

y = سن علی x = سن پدر

$$\begin{cases}x+y=70\\x-y=26\end{cases}$$

$$2x=96\Rightarrow\boxed{x=48}\qquad\Rightarrow 48+y=70\Rightarrow\boxed{y=22}$$

ارزشیابی مستمر

۱- آیا نقطه $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ جواب دستگاه $\begin{cases}2x+y=4\\x-3y=-5\end{cases}$ می‌باشد یا خیر؟(۲ نمره)

۲- با رسم خط‌ها معین کنید جواب دستگاه $\begin{cases}3x-2y=6\\x-y=1\end{cases}$ در کدام ناحیه از دستگاه مختصات قرار می‌گیرد. (۲)

۳- دستگاه $\begin{cases}-3x+2y=1\\5x+3y=11\end{cases}$ را به روش حذفی حل کنید. (۲)

۴- دستگاه $\begin{cases}2x-y=3\\x+2y=4\end{cases}$ را به روش جایگزینی حل کنید. (۲)

۵- مجموع سن علی و پدرش ۵۰ سال و اختلاف سن آنها ۲۶ سال است. سن هریک را بیابید. (۲)

BIAMOZ.com

۱ بله، زیرا این نقطه در هر دو معادله خط صدق می‌کند یعنی روی هر دو خط قرار دارد.

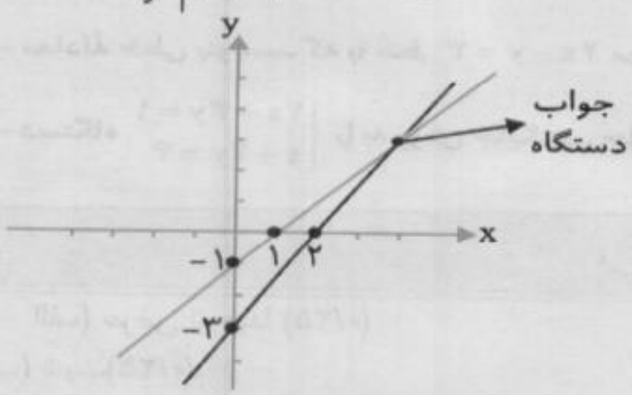
$$۲x+y=۴ \xrightarrow[y=۲]{x=۱} ۲\times۱+۲=۴ \Rightarrow ۴=۴ \quad (۱)$$

$$x-۳y=-۵ \xrightarrow[y=۲]{x=۱} ۱-۳\times۲=-۵ \Rightarrow -۵=-۵ \quad (۱)$$

۲

$$۳x-۲y=۶ \rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & -۳ & ۰ \end{array} \quad (۰/۵)$$

$$x-y=۱ \rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & -۱ & ۰ \end{array} \quad (۰/۵)$$



(۰/۵)

جواب دستگاه در ناحیه اول قرار دارد. (۰/۵)

۳

$$\begin{array}{l} \times۵ \\ \times۳ \end{array} \begin{cases} -۳x+۲y=۱ \\ ۵x+۳y=۱۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۱۵x+۱۰y=۵ \\ ۱۵x+۹y=۳۳ \end{cases} \quad (۰/۵)$$

$$\overline{۱۹y=۳۸} \Rightarrow y=۲ \quad (۰/۵)$$

$$-۳x+۲y=۱ \xrightarrow{y=۲} -۳x+۲\times۲=۱ \quad (۰/۵)$$

$$\longrightarrow -۳x=-۳ \Rightarrow x=۱ \quad (۰/۵)$$

۴

$$\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ x+۲y=۴ \end{cases} \Rightarrow x=-۲y+۴ \quad (۰/۵)$$

$$۲x-y=۳ \xrightarrow{x=-۲y+۴} ۲(-۲y+۴)-y=۳ \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow -۴y+۸-y=۳ \Rightarrow -۵y=-۵ \Rightarrow y=۱ \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow x=-۲\times۱+۴ \Rightarrow x=۲ \quad (۰/۵)$$

۵

$x=$ سن پدر علی

$y=$ سن علی

$$\begin{cases} x+y=۵۰ \quad (۰/۵) \\ x-y=۲۶ \quad (۰/۵) \end{cases}$$

$$\overline{۲x=۷۶} \Rightarrow x=\frac{۷۶}{۲}=۳۸ \Rightarrow y+۳۸=۵۰ \Rightarrow y=۱۲ \Rightarrow$$ علی ۱۲ سال و پدرش ۳۸ سال دارد.

(۰/۵)

BIAMOZ.com

آزمون تکنیکی

مبحث فصل ۶ — نام: ..... — تاریخ: ...../...../.....

۱- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. ۱

الف) در خط‌های مبدأ گذر ..... برابر با صفر است.

ب) ثبت تفاضل عرض‌های دو نقطه از یک نقطه به تفاضل طول‌های همان دو نقطه را ..... خط می‌گوییم.

ج) معادله‌ی خط گذرنده از نقاط $\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}$ برابر با ..... است.

د) اگر دو خط برهم منطبق باشند دستگاه شامل معادلات آنها دارای ..... جواب است.

۲- ثبت و عرض از مبدأ خط به معادلهٔ $۳x-۴y=۱۲$ را بیابید. ۱

۳- معادلهٔ خطی بنویسید که با خط $۲x-y=۳$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}$ بگذرد. ۱/۵

۴- دستگاه $\begin{cases}۲x-۳y=۱\\x+۲y=۴\end{cases}$ را به روش جایگزینی حل کنید.

پاسخ آزمون تکنیکی

۱ الف) عرض از مبدا (۰/۲۵)

ب) شیب(۰/۲۵)

ج) $x=۲$ (۰/۲۵)

د) بی‌شمار(۰/۲۵)

۲

$$۳x-۴y=۱۲\Rightarrow -۴y=-۳x+۱۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow[(۰/۲۵)]{+(-۳)} y=\frac{۳}{۴}x-۳\Rightarrow \begin{cases}\text{شیب}=\frac{۳}{۴} & (۰/۲۵)\\ \text{عرض از مبدأ}=-۳ & (۰/۲۵)\end{cases}$$

۳ ابتدا شیب خط $۲x-y=۳$ را می‌یابیم و آن را به عنوان شیب خط مورد نظر در نظر می‌گیریم.

$$۲x-y=۳\Rightarrow y=۲x-۳\Rightarrow \text{شیب}=۲ \quad (۰/۵)$$

$$y=ax+b\xrightarrow[(۰/۵)]{\text{شیب}=۲} y=۲x+b\xrightarrow[(۰/۵)]{\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}} -۱=۲\times ۲+b\Rightarrow b=-۵$$

۴

$$\begin{cases}۲x-۳y=۱\xrightarrow[(۰/۲۵)]{x=-۲y+۴} ۲(-۲y+۴)-۳y=۱\Rightarrow -۴y+۸-۳y=۱ \xrightarrow{(۰/۲۵)}\\ x+۲y=۴\Rightarrow x=-۲y+۴ \xrightarrow[(۰/۲۵)]{} \Rightarrow -۷y=-۷\Rightarrow y=۱ \xrightarrow{(۰/۲۵)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=-۲y+۴=-۲\times ۱+۴=-۲+۴=۲\Rightarrow x=۲$$

BIAMOZ.com

فصل ۷ عبارت‌های گویا

درس ۱ معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا

چکیده درس:

نکته۱: به کسری که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد یک عبارت گویا گفته می‌شود.

مثال: عبارت‌های $\frac{3x-1}{x+1}$ ، $\frac{2x}{y+\sqrt{2}}$ ، ۴، $\frac{1}{x}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ،

$\frac{-y}{3}$ و $\frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$ همگی عبارت‌های گویا هستند.

مثال: عبارت‌هایی چون $\frac{\sqrt{xy}}{2}$ ، $\frac{\sqrt[3]{x}}{x+3}$ ، $\frac{2^x+1}{y-3}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$

و $|x-2|$، هیچ‌کدام عبارت گویا به شمار نمی‌روند.

نکته۲: حوزه تعریف (یا دامنه) یک عبارت گویا مجموعه مقادیری از متغیر است که به ازای آن‌ها، آن عبارت گویا تعریف شده است. برای یافتن حوزه تعریف یک عبارت گویا باید مقادیری از متغیر را که به ازای آن‌ها مخرج کسر صفر می‌شود، حذف کنیم.

مثال: در عبارت گویای $\frac{2}{x-3}$ عدد $x=3$ باعث می‌شود که مخرج این عبارت گویا صفر شود. بنابراین این عبارت گویا به ازای $x=3$ تعریف نشده است.

مثال: عبارت گویای $\frac{x^2+1}{(x-3)(x+2)}$ ، به ازای دو عدد $x=-2$ و $x=3$ تعریف نشده است.

مثال: عبارت گویا $\frac{2a}{a^2-a-2}$ به ازای چه مقادیری از a تعریف نشده است؟

باید ببینیم مخرج این کسر به ازای چه اعدادی صفر می‌شود. ابتدا آن را تجزیه می‌کنیم.

$$a^2-a-2=0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a-2)(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

نکته۳: برای ساده کردن یک عبارت گویا ابتدا صورت و مخرج آن را تجزیه می‌کنیم سپس عوامل مشترک در صورت و مخرج را با هم ساده می‌کنیم.

مثال: عبارت‌های گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\frac{\cancel{5}\,a^2}{\cancel{15}\,\cancel{a^2}\,3a^2} = \frac{5}{3a^2}$

ب) $\frac{\cancel{x^3}\,\cancel{y^2}}{\cancel{7}\,\cancel{x^2}\,\cancel{y^2}} = \frac{3y^2}{7x}$

ج) $\frac{a-1}{1-a} = \frac{a-1}{-(a-1)} = -1$

د) $\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} = \frac{(x-y)\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)} = \frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$

هـ) $\frac{b^2-5b-14}{b^2+b-2} = \frac{(b-7)\cancel{(b+2)}}{\cancel{(b+2)}(b-1)} = \frac{b-7}{b-1}$

و) $\frac{3a-6}{a^2-4a+4} = \frac{3\cancel{(a-2)}^{1}}{\cancel{(a-2)^2}_{a-2}} = \frac{3}{a-2}$

۱۱۴ سؤال متن

عبارت‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟) چون هیچ کدام از آن‌ها از تقسیم دو چند جمله‌ای به دست نیامده‌اند.

$\sqrt{xy}$ و $\frac{\sqrt{x}}{x+y}$ و $|x-y|$ و $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

۱۱۵ کار در کلاس

کدام یک از عبارت‌های زیر گویا است؟

$\boxed{\frac{7}{x-1}}$ ، $\boxed{\frac{x+6}{3}}$ ، $\boxed{\frac{ah}{2}}$ ، $\boxed{\frac{\sqrt{3}+x}{5}}$ ، $\cancel{\frac{\sqrt{2x}}{25}}$ ، $\cancel{\frac{|x|+|y|}{x}}$

$\cancel{\frac{x\sqrt{y}+1}{x^2}}$ ، $\boxed{\frac{x-5}{\sqrt{3}+1}}$ ، $\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}x}}$ ، $\boxed{\frac{mn+n^2}{5-n}}$ ، $\boxed{14}$ ، $\boxed{\frac{3-a}{2+x}}$

BIAMOZ.com

فعالیت ۱۱۵

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به‌ازای عددهای داده شده در جدول زیر به‌دست آورید:

x	-2	7	$\frac{1}{2}$	0	-1	-5
$\frac{x+5}{x-3}$	$\frac{3}{-5}$	3	$-\frac{11}{5}$	$-\frac{5}{3}$	-1	0

کار در کلاس ۱۱۶

هریک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف) $\frac{8x+5}{2} \Rightarrow$ به ازای هر مقداری تعریف شده است

ب) $\frac{7+x}{x} \Rightarrow x=0$

ج) $\frac{2b+1}{2b-1} \Rightarrow 2b-1=0 \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

د) $\frac{3x}{x^2+4} \Rightarrow$ به‌ازای هر مقداری تعریف شده است.

هـ) $\frac{x}{x^2-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=1, x=-1$

و) $\frac{a+5}{a^2-5a+6}=\frac{a+5}{(a-3)(a-2)} \Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \\ a-2=0 \end{cases} \Rightarrow a=3, a=2$

فعالیت ۱۱۶

توضیح دهید که هر یک از عبارت‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

در هر یک از عبارت‌های زیر ابتدا صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم و سپس عامل‌های مشترک را ساده می‌کنیم.

الف) $\frac{18y^3}{60y^5}=\frac{3}{10y^2}$

ب) $\frac{x+3}{x+1}\ \frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}=\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3}=$ از اتحاد مربع دو جمله‌ای و جمله مشترک استفاده شده است.

(از اتحاد مزدوج استفاده شده است.)

ج) $\frac{y^2-9}{3y+9}=\frac{(y-3)(y+3)}{3(y+3)}=\frac{y-3}{3}$

د) $\frac{2\cancel{8}^{1}\cancel{a}\cancel{b}^{7}b^{4}}{\cancel{20}^{5}\cancel{a}^{a}\cancel{b}^{1}\cancel{b}^{3}}=\frac{2b^4}{5a}$

هـ) $\frac{b-5}{5-b}=\frac{b-5}{-(b-5)}=-1$

کار در کلاس ۱۱۷

۱- عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{m^2-16}{4-m}=\frac{(m-4)(m+4)}{4-m}=\frac{(m-4)(m+4)}{-(m-4)}=-(m+4)$

ب) $\frac{6m+18}{7m+21}=\frac{6(m+3)}{7(m+3)}=\frac{6}{7}$

ج) $\frac{a^2-5a-14}{a^2+a-2}=\frac{(a-7)(a+2)}{(a+2)(a-1)}=\frac{a-7}{a-1}$

د) $\frac{x^4-y^4}{y-x}=\frac{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)}{-(x-y)}=-(x^2+y^2)(x+y)$

BIAMOZ.com

۲- عبارت $\frac{a+ax}{a}$ به دو شکل ساده شده؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

(بدون تجزیه کردن نمی‌توان ساده کرد)

الف) $\frac{a+\cancel{a}x}{\cancel{a}} = a+x$ نادرست

ب) $\frac{a+ax}{a} = \frac{\cancel{a}(1+x)}{\cancel{a}} = 1+x$ درست

تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را به‌دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

الف) $\frac{5x}{3ab^2} \Rightarrow a=0$ یا $b=0$

ب) $\frac{2y}{y(2y-6)} \Rightarrow y=0$ یا $2y-6=0 \quad 2y=6 \quad \Rightarrow y=\frac{6}{2}=3$

ج) $\frac{2P}{P^2-P-12} = \frac{2P}{(P-4)(P+3)} \Rightarrow P=4$ یا $P=-3$

د) $\frac{2x+5}{x} \Rightarrow x=0$

هـ) $\frac{x^2-1}{x+5} \Rightarrow x=-5$

و) $\frac{a+3}{2a+1} \Rightarrow a=\frac{-1}{2}$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

الف) $\frac{3-x}{x^2-5x+6} = \frac{3-x}{(x-2)(x-3)} = \frac{-\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = \frac{-1}{x-2}$

ب) $\frac{4x^2+8x}{12x+24} = \frac{{}^{1}\cancel{4}x\cancel{(x+2)}}{{}_{3}\cancel{12}\cancel{(x+2)}} = \frac{x}{3}$

ج) $\frac{24x^2}{12x^2-6x} = \frac{{}^{4}\cancel{24}\cancel{x^{2}}^{x}}{{}_{1}\cancel{6}{}_{1}\cancel{x}(2x-1)} = \frac{4x}{2x-1}$

د) $\frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y} = \frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} = \frac{\cancel{y}(y-3)\cancel{(y+1)}}{\cancel{y}\cancel{(y+1)}} = y-3$

هـ) $\frac{1-t^4}{t^2+1} = \frac{(1-t)(1+t)\cancel{(1+t^2)}}{\cancel{t^2+1}} = (1-t)(1+t)$

و) $\frac{16x^2-9y^2}{8x-6y} = \frac{\cancel{(4x-3y)}(4x+3y)}{2\cancel{(4x-3y)}} = \frac{4x+3y}{2}$

ز) $\frac{6a^4b^2}{4ab^8} = \frac{3a^3}{2b^6}$

ح) $\frac{-2a-8}{a^2+2a-8} = \frac{-2\cancel{(a+4)}}{\cancel{(a+4)}(a-2)} = \frac{-2}{a-2}$

۳- عبارت‌هایی را که حاصل آنها ۱ و یا ۱- است معلوم کنید.

الف) $\frac{2y+3}{2y-3}$

ب) $\frac{2y-3}{3-2y} = \frac{2y-3}{-(2y-3)} = -1$

ج) $\frac{2y+3}{3+2y} = \frac{2y+3}{2y+3} = 1$

د) $\frac{2y+3}{-2y-3} = \frac{2y+3}{-(2y+3)} = -1$

BIAMOZ.com

۴- هریک از عبارت‌های داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

۱) $\frac{a-۲}{a+۵}$	۲) $\frac{a+۲}{a-۵}$	۳) $\frac{a-۲}{a-۵}$	۴) $\frac{a+۲}{a+۵}$	۵) $\frac{۲-a}{a+۵}$
۶) $\frac{-a-۲}{-a-۵}$	۷) $\frac{-a-۲}{۵-a}$	۸) $\frac{a-۲}{-a-۵}$	۹) $\frac{۲-a}{-a-۵}$	۱۰) $\frac{-a+۲}{-a+۵}$

۵- در جای خالی چه عبارتی را باید نوشت؟

الف) $\frac{۱-Z}{Z}=\frac{(۱-Z)(Z^۲+۱)}{Z^۳+Z}$ $\quad Z(Z^۲+۱)$

ب) $\frac{۳x}{x-۳}=\frac{\boxed{۳x(x+۲)}}{x^۲-x-۶}$ $\quad (x-۳)(x+۲)$

ج) $\frac{۳y+۲}{۵}=\frac{۱}{۵}$ $\quad (\boxed{۳y+۲})$

د) $\frac{(x-۵)\boxed{(x-۲)(x+۱)}}{(x-۲)(x-۵)}=x+۱$

۶- از عبارت‌های زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

الف) $\frac{z}{t}(x+y)$ ✓

ب) $\frac{zx+y}{t}$ ×

ج) $\frac{۱}{t}\times z(x+y)$ ✓

د) $z\times\frac{x+y}{t}$ ✓

هـ) $\frac{zx}{t}+\frac{zy}{t}$ ✓

و) $\frac{zx}{t}+y$ ×

ارزشیابی مستمر

۱- کدام عبارت گویا و کدام گویا نیست؟ (۱نمره)

الف) $\frac{۲x-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳x}}$ $\quad$ ب) $\frac{۱}{\sqrt{x+۱}}$ $\quad$ ج) -۵ $\quad$ د) $\frac{۲^x+۱}{x-۱}$

۲- مقادیری را تعیین کنید که به ازای آن‌ها عبارت‌های گویای زیر تعریف نشده‌اند؟ (۱)

الف) $\frac{۲x-۱}{۴x-۸}$ $\quad$ ب) $\frac{۶x^۲+۱}{x^۲+۳x+۲}$

۳- عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید. (۴)

الف) $\frac{۱۸y^۳x}{۲۴x^۲y}$ $\quad$ ب) $\frac{x^۲-۴}{x^۲-۵x+۶}$ $\quad$ ج) $\frac{x-۳x^۲}{۹x^۲-۱}$ $\quad$ د) $\frac{a^۴-b^۴}{b-a}$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را تعیین کنید. (۱)

الف) $\frac{۲y+۳}{-۳-۲y}$ $\quad$ ب) $\frac{x^۲+۱}{۱+x^۲}$

۵- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۲)

الف) $\frac{x^۳+x}{\square}=\frac{x^۲+۱}{y+۱}$ $\quad$ ب) $\frac{x^۲-۹}{x^۲-x-۶}=\frac{\square}{x+۲}$

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) گویا است $\quad$ ب) گویا نیست $\quad$ ج) گویا است $\quad$ د) گویا نیست (هر قسمت ۰/۲۵)

۲ این عبارت به ازای $x=۲$ تعریف شده نیست. (۰/۵)

الف) $\frac{۲x-۱}{۴x-۸}\Rightarrow ۴x-۸=۰\Rightarrow ۴x=۸\Rightarrow \boxed{x=۲}$

ب) $\frac{۶x^۲+۱}{x^۲+۳x+۲}\Rightarrow x^۲+۳x+۲=۰\Rightarrow (x+۲)(x+۱)=۰$ $\quad$ (۰/۵)

$\Rightarrow\begin{cases}x+۲=۰\Rightarrow \boxed{x=-۲}\\ x+۱=۰\Rightarrow \boxed{x=-۱}\end{cases}$

این عبارت به ازای $x=-۲$ و $x=-۱$ تعریف شده نیست.

BIAMOZ.com

۳

الف) $\frac{۱۲x^{۳}y^{۲}}{۲۴x^{۴}y^{۲}} = \frac{۳y^{۲}}{۴x}$ (۱)

ب) $\frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}-۵x+۶} = \frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(x-۳)} = \frac{x+۲}{x-۳}$ (۱)

ج) $\frac{x-۳x^{۲}}{۹x^{۲}-۱} = \frac{x(۱-۳x)}{(۳x-۱)(۳x+۱)} = \frac{-x(۳x-۱)}{(۳x-۱)(۳x+۱)} = \frac{-x}{۳x+۱}$ (۱)

د) $\frac{a^{۴}-b^{۴}}{b-a} = \frac{(a^{۲}-b^{۲})(a^{۲}+b^{۲})}{-(a-b)} = \frac{(a-b)(a+b)(a^{۲}+b^{۲})}{-(a-b)}$ (۰/۵)

$= -(a+b)(a^{۲}+b^{۲})$ ۰/۵)

۴

الف) $\frac{۲y+۳}{-۳-۲y} = \frac{۲y+۳}{-(۲y+۳)} = -۱$ (۰/۵)

ب) $\frac{x^{۲}+۱}{۱+x^{۲}} = \frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+۱} = ۱$ (۰/۵)

۵

الف) $\frac{x^{۳}+x}{\square} = \frac{x^{۲}+۱}{y+۱} \Rightarrow \frac{x(x^{۲}+۱)}{\boxed{xy+x}} = \frac{x^{۲}+۱}{y+۱}$ (۱)

ب) $\frac{x^{۲}-۹}{x^{۲}-x-۶} = \frac{\square}{x+۲} \Rightarrow \frac{(x-۳)(x+۳)}{(x-۳)(x+۲)} = \frac{\boxed{x+۳}}{x+۲}$ (۱)

۲ درس — محاسبات عبارت‌های گویا

چکیده درس:

نکته۴: برای ضرب و تقسیم دو عبارت گویا دقیقاً مانند ضرب و تقسیم دو عدد کسری رفتار می‌کنیم. البته باید صورت و مخرج عبارت‌ها را تجزیه کنیم تا در صورت ساده شدن بتوانیم آن‌ها را با هم ساده کنیم.

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $(d,b,c \neq ۰)$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۱) $\frac{x^{۲}y}{۶x^{۲}y^{۳}} \times \frac{۱۲x^{۳}y^{۲}}{۲x^{۲}y} = \frac{a}{۱} = a$

۲) $\frac{x+۲}{x^{۲}-۳x} \times \frac{x^{۲}-x-۶}{x^{۲}+۴x+۴} =$

$\frac{x+۲}{x(x-۳)} \times \frac{(x-۳)(x+۲)}{(x+۲)(x+۲)} = \frac{۱}{x}$

۳) $\frac{a^{۳}-b^{۳}}{b} \div \frac{(a-b)^{۲}}{۲ab} = \frac{a^{۳}-b^{۳}}{b} \times \frac{۲ab}{(a-b)^{۲}} =$

$\frac{(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})}{b} \times \frac{۲ab}{(a-b)^{۲}} =$

$= \frac{۲a(a^{۲}+ab+b^{۲})}{a-b}$

نکته۵: برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا دقیقاً همانند جمع و تفریق اعداد کسری عمل می‌کنیم. یعنی ابتدا برای عبارت‌هایی که قرار است جمع یا تفریق شوند مخرج مشترک می‌گیریم سپس با نوشتن کسری مساوی با کسرهای داده شده آن‌ها را جمع و تفریق می‌کنیم.

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$ $(b,d \neq ۰)$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\frac{۲x-۱}{x+۲} - \frac{۳x}{x+۲} = \frac{(۲x-۱)-(۳x)}{x+۲} = \frac{-x-۱}{x+۲}$

BIAMOZ.com

ب) $\frac{2x-1}{x+2}+\frac{-2x^2}{x^2-4}=\frac{(2x-1)(x-2)+(-2x^2)}{x^2-4}$

$=\frac{2x^2-4x-x+2-2x^2}{x^2-4}=\frac{-5x+2}{x^2-4}$

ج) $\frac{x-1}{\underset{2x(x-2)}{2x^2-4x}}+\frac{3}{\underset{3(x+3)}{3x+9}}=$

$\frac{(x-1)\times 3(x+3)+3(2x(x-2))}{6x(x-2)(x+3)}$

$=\frac{3x^2+6x-9+6x^2-12x}{6x(x-2)(x+3)}=\frac{9x^2-6x-9}{6x(x-2)(x+3)}$

نکته: هرگاه صورت و مخرج یک عبارت گویا خود شامل عبارت‌های گویا باشد، می‌گوییم این عبارت گویا، یک عبارت گویای مرکب است. برای ساده کردن این عبارت‌ها صورت و مخرج را جداگانه حساب کرده سپس صورت و مخرج را بر هم تقسیم می‌کنیم یا اینکه می‌توانیم صورت و مخرج را در یک عبارت مناسب ضرب کنیم تا مخرج‌ها حذف شوند و سپس محاسبه را انجام دهیم.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\frac{\frac{a-a^2}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1}-a}=\frac{\frac{a-a^2}{a^2-1}}{\frac{a-a^2-a}{a+1}}=\frac{a-a^2}{a^2-1}\div\frac{-a^2}{a+1}=$

$\frac{\overset{1}{\cancel{a}}(1-a)}{\underset{-1}{\cancel{(a-1)}}\ \cancel{(a+1)}}\times\frac{\cancel{(a+1)}}{\underset{a}{\cancel{a^2}}}=\frac{1}{a}$

ب) $\frac{\frac{y}{x+y}-\frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}}$

صورت و مخرج را در (x^2-y^2) ضرب می‌کنیم ←

$\frac{(x^2-y^2)\times(\frac{y}{x+y}-\frac{x}{x-y})}{(x^2-y^2)\times(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y})}=$

$\frac{y(x-y)-x(x+y)}{x(x-y)+y(x+y)}=\frac{yx-y^2-x^2-xy}{x^2-xy+yx+y^2}=$

$\frac{-x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{-(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=-1$

فعالیت ۱۱۹

توضیح دهید که هر یک از ضرب‌ها و یا تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل و حاصل عبارت را ساده کنید. برای انجام ضرب‌ها صورت و مخرج عبارت‌های گویا را تجزیه می‌کنیم و سپس ساده می‌کنیم و برای انجام تقسیم‌ها نیز با معکوس کردن کسر دوم آن‌ها را به ضرب تبدیل کرده و ضرب را انجام می‌دهیم.

الف) $\frac{\overset{1}{\cancel{5}}xy^3}{\underset{1}{\cancel{8}}x^2z^2}\times\frac{\overset{2}{\cancel{16}}z^3}{\underset{3}{\cancel{15}}y^2}=\frac{2yz}{3x}$

ب) $\frac{x+3}{x}\times\frac{x^2}{x^2-2x-15}=\frac{\cancel{x+3}}{\underset{1}{\cancel{x}}}\times\frac{\overset{x}{\cancel{x^2}}}{\cancel{(x+3)}(x-5)}=\frac{x}{(x-5)}$

ج) $\frac{x-6}{x^2-12x+36}\times\frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12}=\frac{\cancel{x-6}}{\cancel{(x-6)}\ \cancel{(x-6)}}\times\frac{\cancel{(x-6)}\ \cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x+4)}=\frac{1}{x+4}$

د) $\frac{4x^2}{3xy}\div\frac{8x}{y^3}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}x^2}{3\cancel{xy}}\times\frac{\cancel{y^3}\,y^2}{\underset{2}{\cancel{8}}\cancel{x}}=\frac{y^2}{6}$

هـ) $\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a}\div\frac{a^2+3a+2}{a-4}=\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a}\times\frac{a-4}{a^2+3a+2}=\frac{(a-5)(a+1)}{a(a-4)}\times\frac{a-4}{(a+1)(a+2)}=\frac{a-5}{a(a+2)}$

کار در کلاس ۱۲۰

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{a^2-a-6}{a+3}\times\frac{a+3}{a^2-4}=\frac{(a-3)\cancel{(a+2)}}{\cancel{a+3}}\times\frac{\cancel{a+3}}{\cancel{(a+2)}(a-2)}=\frac{a-3}{a-2}$

BIAMOZ.com

ب) $\frac{a^2b+ab^2}{a} \times \frac{3ab}{(a+b)^2} = \frac{ab(a+b)}{a} \times \frac{3ab}{(a+b)^2} = \frac{3ab^2}{(a+b)}$

ج) $\frac{x^2+3x+2}{x+2} \div \frac{x+1}{x+5} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)} \times \frac{x+5}{x+1} = x+5$

د) $\frac{4x^4}{3xy^2} \div \frac{8x}{9y^5} = \frac{4x^4}{3xy^2} \times \frac{9y^5}{8x} = \frac{3x^2y^3}{2}$

۱۲۰ فعالیت

توضیح دهید که هر یک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل، و مانند نمونه یک جمع و تفریق عددی مشابه آن را ارائه کنید.

الف) $\frac{3x+7}{x+2} + \frac{2x-3}{x+2} = \frac{3x+7+2x-3}{x+2} = \frac{5x+4}{x+2}$

ب) $\frac{3x+7}{x+2} - \frac{2x-3}{x+2} = \frac{3x+7-(2x-3)}{x+2} = \frac{3x+7-2x+3}{x+2} = \frac{x+10}{x+2}$

ج) $\frac{a^2-20}{a^2-4} + \frac{a-2}{a+2} = \frac{a^2-20+(a-2)^2}{a^2-4} = \frac{a^2-20+a^2-4a+4}{a^2-4} = \frac{2a^2-4a-16}{a^2-4} = \frac{2(a^2-2a-8)}{a^2-4} = \frac{2(a-4)(a+2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{2(a-4)}{a-2}$

د) $\frac{a+1}{a} - \frac{3a+2}{a(a+2)} = \frac{(a+1)(a+2)-(3a+2)}{a(a+2)} = \frac{a^2+3a+2-3a-2}{a(a+2)} = \frac{a^2}{a(a+2)} = \frac{a}{a+2}$

$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$

$\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{-1}{5}$

$\frac{7}{10} + \frac{9}{5} = \frac{7+18}{10} = \frac{25}{10}$

$\frac{7}{30} + \frac{3}{28} = \frac{98+45}{420} = \frac{143}{420}$

۱۲۱ کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y$

ب) $\frac{6}{x} + \frac{4}{-x} = \frac{6-4}{x} = \frac{2}{x}$

ج) $\frac{2x^2-16}{x^2-4} - \frac{x+4}{x+2} = \frac{2x^2-16-(x+4)(x-2)}{x^2-4} = \frac{2x^2-16-x^2-2x+8}{x^2-4} = \frac{x^2-2x-8}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x-4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-4}{x-2}$

د) $\frac{7}{x^2-x-2} + \frac{x}{x^2+4x+3} = \frac{7(x+3)+x(x-2)}{(x-2)(x+3)(x+1)} = \frac{7x+21+x^2-2x}{(x-2)(x+3)(x+1)} = \frac{x^2+5x+21}{(x-2)(x+3)(x+1)}$

هـ) $\frac{2}{3y(x-y)} + \frac{x+1}{x(x-y)^2} = \frac{2x(x-y)+3y(x+1)}{3xy(x-y)^2} = \frac{2x^2-2xy+3xy+3y}{3xy(x-y)^2} = \frac{2x^2+xy+3y}{3xy(x-y)^2}$

BIAMOZ.com

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از روش‌های ارائه شده برای ساده کردن کسر مرکب با روش دیگر چه تفاوتی دارد؛ هر جا لازم است حل را کامل کنید. ($x \neq 0$)

در حل قسمت «الف» صورت و مخرج در x^2 ضرب شده‌اند تا عبارت صورت و مخرج ساده‌تر شود سپس صورت و مخرج را تجزیه و ساده کرده‌ایم.

۱) الف)
$$\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2})}{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}=\frac{x^2-x-6}{x^2-4x+3}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{(x-3)}(x-1)}=\frac{x+2}{x-1}$$

ب)
$$\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{\frac{x^2-x-6}{x^2}}{\frac{x^2-4x+3}{x^2}}=\frac{x^2-x-6}{x^2}+\frac{x^2-4x+3}{x^2}=$$
$$\frac{x^2-x-6}{x^2}\times\frac{x^2}{x^2-4x+3}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{(x-3)}(x-1)}=\frac{x+2}{x-1}$$

در حل قسمت (ب) ابتدا برای صورت و مخرج، مخرج مشترک x^2 گرفته شده است سپس عبارت صورت بر عبارت مخرج تقسیم شده است.

۲) الف)
$$\frac{\frac{2}{a}-\frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1}-\frac{3}{a}}=\frac{a(a+1)(\frac{2}{a}-\frac{3}{a+1})}{a(a+1)(\frac{2}{a+1}-\frac{3}{a})}=\frac{2(a+1)-3a}{2a-3(a+1)}=\frac{2a+2-3a}{2a-3a-3}=\frac{2-a}{-a-3}$$

ب)
$$\frac{\frac{2}{a}-\frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1}-\frac{3}{a}}=\frac{\frac{2(a+1)-3a}{a(a+1)}}{\frac{2a-3(a+1)}{a(a+1)}}=\frac{\frac{2-a}{a(a+1)}}{\frac{-a-3}{a(a+1)}}=$$
$$\frac{2-a}{a(a+1)}+\frac{-a-3}{a(a+1)}=\frac{2-a}{\cancel{a(a+1)}}\times\frac{\cancel{a(a+1)}}{-a-3}=\frac{2-a}{-a-3}$$

$a \neq 0$, $a \neq -1$

کار در کلاس

حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید. (مخرج همهٔ کسرها مخالف صفر فرض شده است.)

الف)
$$\frac{n-\frac{n^2}{n-m}}{1+\frac{m^2}{n^2-m^2}}=\frac{\frac{\cancel{n^2}-nm-\cancel{n^2}}{n-m}}{\frac{n^2-\cancel{m^2}+\cancel{m^2}}{n^2-m^2}}=\frac{-nm}{n-m}+\frac{n^2}{n^2-m^2}$$
$$=\frac{-mn}{n-m}\times\frac{n^2-m^2}{n^2}=\frac{-m\cancel{n}}{\cancel{n-m}}\times\frac{(\cancel{n-m})(n+m)}{\cancel{n^2}\,n}=\frac{-m(n+m)}{n}$$

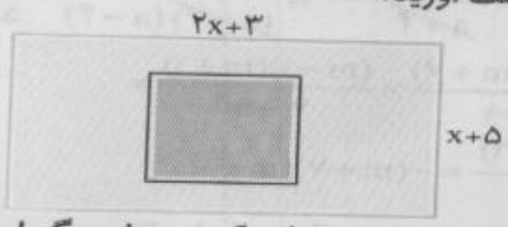
ب)
$$\frac{\frac{y}{x+y}-\frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}}=\frac{\frac{\cancel{yx}-y^2-x^2-\cancel{xy}}{(x+y)(x-y)}}{\frac{x^2-\cancel{xy}+\cancel{xy}+y^2}{(x+y)(x-y)}}=\frac{\frac{-y^2-x^2}{(x+y)(x-y)}}{\frac{x^2+y^2}{(x+y)(x-y)}}=\frac{-(\cancel{y^2+x^2})}{\cancel{(x+y)}\,\cancel{(x-y)}}\times\frac{\cancel{(x+y)}\,\cancel{(x-y)}}{\cancel{x^2+y^2}}=-1$$

BIAMOZ.com

۱۲۲

فعالیت

طول ضلع مربع در داخل مستطیل، نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل $\frac{۵}{۲۶}$ باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید.



حل را کامل کنید و توضیح دهید که چگونه به کمک ساده کردن عبارت گویای به دست آمده و حل معادله، پاسخ به دست می‌آید.

مساحت مستطیل $= (۲x+۳)(x+۵)$ مساحت مربع $= \frac{(x+۵)^۲}{۴}$ طول ضلع مربع $= \frac{x+۵}{۲}$

$$\frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{(\frac{x+۵}{۲})^۲}{(۲x+۳)(x+۵)} = \frac{۵}{۲۶}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+۵)^۲}{۴(۲x+۳)(x+۵)} = \frac{۵}{۲۶} \Rightarrow \frac{x+۵}{۴x+۶} = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow ۷x = ۳۵ \Rightarrow x = ۵$$

$$\Rightarrow \text{طول} = ۲x+۳ = ۲\times۵+۳ = ۱۳$$

$$\text{عرض} = x+۵ = ۵+۵ = ۱۰$$

با توجه به این‌که نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل یک عبارت گویا شده است، ابتدا این عبارت گویا تا حد امکان ساده شده، سپس یک معادله تشکیل شده است، که با حل آن مقدار x و درنتیجه طول و عرض مستطیل به دست می‌آید.

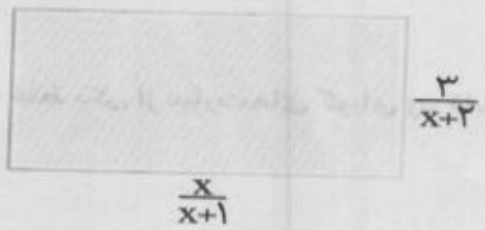
۱۲۳

کار در کلاس

۱- محیط هر شکل را برحسب x به دست آورید و آن را ساده کنید. $(x > ۰)$

$$\text{محیط} = \frac{۲}{۳x} + \frac{۶}{۲x} + \frac{x+۱}{x} = \frac{۴+۱۸+۶x+۶}{۶x}$$

$$= \frac{۲۸+۶x}{۶x} = \frac{۱۴+۳x}{۳x}$$

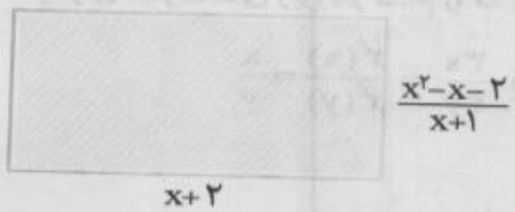


$$\text{محیط} = ۲\times(\frac{۳}{x+۲} + \frac{x}{x+۱}) =$$

$$۲\times(\frac{۳(x+۱)+x(x+۲)}{(x+۲)(x+۱)}) = ۲\times(\frac{x^۲+۵x+۳}{(x+۲)(x+۱)})$$

$$= \frac{۲x^۲+۱۰x+۶}{(x+۲)(x+۱)}$$

۲- مساحت مستطیل زیر را برحسب x به دست آورید. $(x > ۲)$



$$\text{مساحت} = (x+۲)\times\frac{x^۲-x-۲}{x+۱}$$

$$= (x+۲)\times\frac{(x-۲)(x+۱)}{x+۱} = (x+۲)(x-۲) = x^۲-۴$$

BIAMOZ.com

تمرین

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (در همهٔ تمرین‌ها مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است)

الف) $\frac{a^2-16}{a+4} \times \frac{a+2}{a^2-8a+16} = \frac{(a-4)(a+4)}{a+4} \times \frac{a+2}{(a-4)(a-4)} = \frac{a+2}{a-4}$

ب) $\frac{m^2-49}{m+1} + \frac{7-m}{m^2-1} = \frac{(m-7)(m+7)}{m+1} \times \frac{(m-1)(m+1)}{7-m} =$

$= \frac{(m-7)(m+7)}{m+1} \times \frac{(m-1)(m+1)}{-(m-7)} = -(m+7)(m-1)$

ج) $\frac{x^2-4x+4}{4x^2y-8xy} + \frac{x^2+x-6}{6x^2+18} = \frac{(x-2)(x-3)}{2xy(x-3)} \times \frac{3(x^2+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x^2+3)}{2xy(x+3)}$

د) $\frac{1-c^2}{b^3} \times \frac{b^2}{1-2c+c^2} = \frac{(1-c)(1+c)}{b^3} \times \frac{b^2}{(c-1)(c-1)} = \frac{(c+1)}{-b(c-1)}$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4} = \frac{x(x^2-y^2)-y(x-y)^2}{x^4-y^4}$

$= \frac{x^3-xy^2-yx^2+2xy^2-y^3}{x^4-y^4} = \frac{x^3-yx^2+xy^2-y^3}{x^4-y^4}$

$= \frac{x^2(x-y)+y^2(x-y)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \frac{(x-y)(x^2+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{1}{x+y}$

ب) $\frac{x+7}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay} = \frac{y(x+7)-x(y+9)}{xy(a-b)} = \frac{yx+7y-xy-9x}{xy(a-b)} = \frac{7y-9x}{xy(a-b)}$

ج) $\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)(a^2-b^2)-a^3+b^3}{a^2-b^2}$

$= \frac{a^3-ab^2+a^2b-b^3-a^3+b^3}{a^2-b^2} = \frac{ab(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$

د) $\frac{4+x^2-2x}{2+x} - 2 - x = \frac{4+x^2-2x-2(2+x)-x(2+x)}{2+x}$

$= \frac{4+x^2-2x-4-2x-2x-x^2}{2+x} = \frac{-6x}{2+x}$

۳- فقط یکی از عبارت‌های گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$\frac{a^2+5}{a^2x}$ ، $\frac{a^2+3}{3x}$ ، $\frac{a^2+b^2}{a^2x}$ ، $\frac{a^2-5a}{a}$ ✓ $= \frac{a(a-5)}{a} = (a-5)$

۴- از میان عبارت‌های زیر، هرکدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{x+3}{y+3}$

ب) $\frac{3-x}{3-y}$

ج) $\frac{3x}{3y} = \frac{3(x)}{3(y)} = \frac{x}{y}$

د) $\frac{x^3}{y^3}$

هـ) $\frac{a^3x}{a^3y} = \frac{a^3(x)}{a^3(y)} = \frac{x}{y}$

BIAMOZ.com

۵- عبارت $\frac{-x+۳}{x+۵}$ با کدام‌یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

با عبارت (ب) برابر است.

الف) $-\frac{x+۳}{x+۵}$ ب) $-\frac{x-۳}{x+۵}$ ج) $\frac{x-۳}{x+۵}$ د) $-\frac{۳-x}{x+۵}$

۶- کدام‌یک از عبارت‌های زیر به درستی ساده شده است؟

الف) $\frac{a+۵}{a^۲-۲۵}=\frac{a+۵}{(a+۵)(a-۵)}=a-۵$ غلط

ب) $\frac{a+۵}{a^۲-۲۵}=\frac{a+۵}{(a+۵)(a-۵)}=\frac{۱}{a-۵}$ درست

۷- اگر $A=a^۲-b^۲$ و $B=a^۲+b^۲$ و $C=۲ab$، حاصل عبارت $\frac{A^۲-B^۲}{C^۲}$ را به دست آورید.

روش اول:

$$\frac{A^۲-B^۲}{C^۲}=\frac{(A-B)(A+B)}{C^۲}=\frac{(a^۲-b^۲-a^۲-b^۲)(a^۲-b^۲+a^۲+b^۲)}{(۲ab)^۲}=\frac{(-۲b^۲)(۲a^۲)}{۴a^۲b^۲}=-۱$$

روش دوم:

$$\frac{A^۲-B^۲}{C^۲}=\frac{(a^۲-b^۲)^۲-(a^۲+b^۲)^۲}{(۲ab)^۲}=\frac{a^۴-۲a^۲b^۲+b^۴-a^۴-۲a^۲b^۲-b^۴}{۴a^۲b^۲}=\frac{-۴a^۲b^۲}{۴a^۲b^۲}=-۱$$

۸- کدام‌یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام‌یک نادرست است. موارد نادرست را اصلاح کنید. (همهٔ عبارت‌های جبری تعریف شده فرض می‌شود.)

الف) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a-b}{ab}$ (نادرست) $\Rightarrow \frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^۲-b^۲}{ab}$

ب) $\frac{x^{۱۳}}{x^{۲۰}}=x^۷$ (نادرست) $\frac{x^{۱۳}}{x^{۲۰}}=\frac{۱}{x^۷}$

ج) $\frac{a}{۵}-\frac{۷-b}{۵}=\frac{a-۷-b}{۵}$ (نادرست) $\Rightarrow \frac{a}{۵}-\frac{۷-b}{۵}=\frac{a-۷+b}{۵}$

د) $\frac{a-b}{b-a}=۱$ (اگر $a\neq b$) (نادرست) $\Rightarrow \frac{a-b}{b-a}=-۱$

هـ) $\frac{۱}{a-b}=\frac{-۱}{a+b}$ (نادرست) $\Rightarrow \frac{۱}{a-b}=\frac{-۱}{b-a}$

و) $\frac{a^۲-b^۲}{a-b}=a+b$ (نادرست) $\frac{a^۲-b^۲}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=a+b$

ز) $\frac{ca+cb}{c+cd}=\frac{a+b}{d}$ (نادرست) $\Rightarrow \frac{ca+cb}{c+cd}=\frac{c(a+b)}{c(۱+d)}=\frac{a+b}{۱+d}$

ح) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}}=\frac{c}{b}$ (درست) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}}=\frac{a}{b}\div\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{a}=\frac{c}{b}$

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.

عرض $=x$ و طول $=۲x-۱$ $\frac{\text{محیط مستطیل}}{\text{مساحت مستطیل}}=\frac{۲(۲x-۱+x)}{x(۲x-۱)}=\frac{۶x-۲}{x(۲x-۱)}$

BIAMOZ.com

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

الف) $\dfrac{\dfrac{a-a^2}{a^2-1}}{\dfrac{a}{a+1}-a} = \dfrac{\dfrac{a-a^2}{a^2-1}}{\dfrac{a-a^2-a}{a+1}} = \dfrac{a-a^2}{a^2-1} + \dfrac{-a^2}{a+1} \Rightarrow \dfrac{a(1-a)}{(a-1)(a+1)} \times \dfrac{a+1}{-a^2} = \dfrac{1}{a}$

ب) $\dfrac{\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{2}{x+y}}{\dfrac{x^2-9y^2}{(x-y)^2}} = \dfrac{x+y-2x+2y}{x^2-y^2} = \dfrac{\dfrac{3y-x}{x^2-y^2}}{\dfrac{x^2-9y^2}{(x-y)^2}}$

$$= \frac{3y-x}{x^2-y^2} + \frac{x^2-9y^2}{(x-y)^2} = \frac{3y-x}{(x-y)(x+y)} \times \frac{(x-y)(x-y)}{(x-3y)-1(x+3y)} = \frac{-(x-y)}{(x+y)(x+3y)}$$

ج) $\dfrac{2x}{x^2+2x+1} + \dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2x(x-1)+(x+1)-2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$

$$= \frac{2x^2-2x+x+1-2x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{3-x}{(x-1)(x+1)^2}$$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که،

الف) حاصل ضرب آنها $\dfrac{a-2}{a+7}$ شود.

$(a-2)$ و $\dfrac{1}{a+7} \Rightarrow (a-2) \times \dfrac{1}{a+7} = \dfrac{a-2}{a+7}$

ب) حاصل جمع آنها $\dfrac{a-2}{a+7}$ شود.

$\dfrac{-2}{a+7}$ و $\dfrac{a}{a+7} \Rightarrow \dfrac{a}{a+7} + \dfrac{-2}{a+7} = \dfrac{a-2}{a+7}$

۱۲- عرض مستطیل مقابل را برحسب x به دست آورید. مساحت مستطیل x^2-9 است.

$\dfrac{x^2-x-12}{x-3}$

$A=x^2-9$

(طول مستطیل) ÷ (مساحت) = عرض مستطیل

$$\text{عرض مستطیل} = (x^2-9) \div \left(\frac{x^2-x-12}{x-3}\right) = x^2-9 \times \frac{x-3}{x^2-x-12}$$

$$= (x-3)(x+3) \times \frac{(x-3)}{(x+3)(x-3)} = (x-3)$$

BIAMOZ.com

ارزشیابی مستمر

۱- ضرب‌ها و تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (۴ نمره)

الف) $\frac{۱۸xy^۲}{۳۵x^۲} \times \frac{۲۱x^۳}{۲y} =$

ب) $\frac{۴y^۳}{۳ab} \div \frac{۲yx}{۹a^۲b} =$

ج) $\frac{a^۲-۴a-۵}{a^۲+۳a+۲} \times \frac{a-۴}{a^۲-۴a}$

د) $\frac{x^۲y+y^۲x}{y} \div \frac{(x+y)^۲}{xy}$

۲- حاصل جمع‌ها و تفریق‌های زیر را به دست آورید. (۳)

الف) $\frac{x^۲-۲}{x^۲-۱} - \frac{x}{x-۱} =$

ب) $\frac{۴}{a^۲+a-۲۰} + \frac{۲}{a^۲+۶a+۵} =$

۳- حاصل عبارت $\frac{\frac{۳}{x-y} + \frac{۱}{x+y}}{\frac{۳}{x-y} - \frac{۱}{x+y}}$ را بیابید. (۱/۵)

۴- عرض مستطیلی را به دست آورید که طول آن $\frac{۱}{x-۲}$ و مساحت آن $\frac{x}{x^۲-۲x}$ باشد. (۱/۵)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱

الف) $\frac{\overset{۹}{\cancel{۱۸}}x\overset{y}{\cancel{y^۲}}}{\underset{۵}{\cancel{۳۵}}\underset{۱}{\cancel{x^۲}}} \times \frac{\overset{۳}{\cancel{۲۱}}\overset{x}{\cancel{x^۳}}}{\underset{۱}{\cancel{۲}}\underset{۱}{\cancel{y}}} = \frac{۲۷x^۲y}{۵}$ (۱)

ب) $\frac{۴y^۳}{۳ab} \div \frac{۲yx}{۹a^۲b} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۴}}\overset{y^۲}{\cancel{y^۳}}}{\underset{۱}{\cancel{۳}}\underset{۱}{\cancel{a}}\underset{۱}{\cancel{b}}} \times \frac{\overset{۳}{\cancel{۹}}\overset{a}{\cancel{a^۲}}\overset{۱}{\cancel{b}}}{\underset{۱}{\cancel{۲}}\underset{۱}{\cancel{y}}x} = \frac{۶ay^۲}{x}$ (۱)

ج) $\frac{a^۲-۴a-۵}{a^۲+۳a+۲} \times \frac{a-۴}{a^۲-۴a} = \frac{(a-۵)\cancel{(a+۱)}}{\cancel{(a+۱)}(a+۲)} \times \frac{\cancel{a-۴}}{a\cancel{(a-۴)}} = \frac{a-۵}{a(a+۲)}$ (۱)

د) $\frac{x^۲y+y^۲x}{y} \div \frac{(x+y)^۲}{xy} = \frac{x\overset{۱}{\cancel{y}}\overset{۱}{\cancel{(x+y)}}}{\underset{۱}{\cancel{y}}} \times \frac{x}{\underset{۱}{\cancel{(x+y)}}(x+y)} = \frac{x^۲}{x+y}$ (۱)

۲

الف) $\frac{x^۲-۲}{x^۲-۱} - \frac{x}{x-۱} = \frac{x^۲-۲-x(x+۱)}{x^۲-۱} = \frac{-۲-x}{x^۲-۱}$ (۱/۵)

ب) $\frac{۴}{\underset{(a+۵)(a-۴)}{\cancel{a^۲+a-۲۰}}} + \frac{۲}{\underset{(a+۱)(a+۵)}{\cancel{a^۲+۶a+۵}}} = \frac{۴(a+۱)+۲(a-۴)}{(a+۵)(a-۴)(a+۱)} = \frac{۴a+۴+۲a-۸}{(a+۵)(a-۴)(a+۱)} = \frac{۶a-۴}{(a+۵)(a-۴)(a+۱)}$ (۱/۵)

۳

$\frac{\frac{۳}{x-y} + \frac{۱}{x+y}}{\frac{۳}{x-y} - \frac{۱}{x+y}} = \frac{\frac{۳(x+y)+(x-y)}{(x-y)(x+y)}}{\frac{۳(x+y)-(x-y)}{(x+y)(x-y)}} = \frac{\frac{۴x+۲y}{(x-y)(x+y)}}{\frac{۲x+۴y}{(x+y)(x-y)}} = \frac{۴x+۲y}{۲x+۴y} = \frac{\cancel{۲}(۲x+y)}{\cancel{۲}(x+۲y)} = \frac{۲x+y}{x+۲y}$ (۱/۵)

۴

طول ÷ مساحت = عرض ⇒ عرض × طول = مساحت مستطیل

عرض $= \frac{x}{x^۲-۲x} \div \frac{۱}{x-۲} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x(x-۲)}} \times \frac{\cancel{x-۲}}{۱} = ۱$

BIAMOZ.com

۳ درس تقسیم چندجمله‌ای‌ها

چکیده درس:

نکته۷: برای تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای، آن‌ها را مانند یک کسر نوشته و سپس به کمک قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان‌ها، این کسر را ساده می‌کنیم.

مثال: تقسیم مقابل را انجام دهید.

$$۳x^۲yz+۹xy^۲t=\frac{\overset{۱}{\cancel{۳}}\overset{x}{\cancel{x^۲}}\cancel{yz}}{\cancel{۳}\cancel{x}\cancel{y^۲}t}=\frac{xz}{۳yt}$$

نکته۸: برای تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک، یک‌جمله‌ای باید تک تک جملات چندجمله‌ای را مانند نکته قبل بر آن یک‌جمله‌ای تقسیم کنیم.

$$\frac{a+b+c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\ (d\neq ۰)$$

مثال: تقسیم مقابل را انجام دهید.

$$(۱۴x^۳yz-۶xy+۳x^۲y^۲z^۲)+(۲x^۲y^۲z)$$

$$\frac{۱۴x^۳yz-۶xy+۳x^۲y^۲z^۲}{۲x^۲y^۲z}=$$

$$\frac{۱۴x^۳yz}{۲x^۲y^۲z}-\frac{۶xy}{۲x^۲y^۲z}+\frac{۳x^۲y^۲z^۲}{۲x^۲y^۲z}=\frac{۷x}{y}-\frac{۳}{xyz}+\frac{۳z}{۲}$$

نکته۹: برای تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای **گام‌های زیر را برمی‌داریم:**

گام ۱) مقسوم و مقسوم‌علیه را به صورت استاندارد (بر اساس توان بیشتر به کمتر متغیر) مرتب می‌کنیم.

گام ۲) جمله اول مقسوم را بر جمله اول مقسوم‌علیه تقسیم کرده و در خارج قسمت می‌نویسیم.

گام ۳) خارج قسمت مرحله قبل را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و زیر مقسوم می‌نویسیم و آن را از مقسوم کم می‌کنیم. (منها می‌کنیم).

گام ۴) اگر درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر نبود، مراحل ۱ تا ۳ را بار دیگر تکرار می‌کنیم. تا جایی پیش می‌رویم که درجه باقیمانده از مقسوم‌علیه کمتر شود.

مثال: تقسیم زیر را انجام دهید و باقیمانده را مشخص کنید.

$$(۲-۳x^۲+x^۳)+(۱+x)\xrightarrow{\text{استاندارد}}$$

$$(x^۳-۳x^۲+۲)+(x+۱)$$

$$\begin{array}{r|l}\cancel{x^۳}-۳x^۲+۲ & x+۱\\ \hline -(\cancel{x^۳}+x^۲) & x^۲-۴x+۴\\ \hline -\cancel{۴}x^۲+۲ & \\ -(-\cancel{۴}x^۲-۴x) & \\ \hline \cancel{۴}x+۲ & \\ -(\cancel{۴}x+۴) & \\ \hline -۲ & \end{array}$$

$$(\frac{x^۳}{x}=x^۲)$$

$$(\frac{-۴x^۲}{x}=-۴x)$$

$$(\frac{۴x}{x}=۴)$$

نکته ۱۰: اگر باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای P بر چندجمله‌ای Q صفر باشد، می‌گوییم چندجمله‌ای P بر چندجمله‌ای Q بخش‌پذیر است.

مثال: آیا چندجمله‌ای $۳x^۲-۲x-۱$ بر چندجمله‌ای $۳x+۱$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

بله، زیرا طبق تقسیم مقابل معلوم می‌شود که باقیمانده تقسیم برابر صفر است.

$$\begin{array}{r|l}\cancel{۳x^۲}-۲x-۱ & ۳x+۱\\ \hline -(\cancel{۳x^۲}+x) & x-۱\\ \hline -۳x-۱ & \\ -(-۳x-۱) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

فعالیت ۱۲۶

توضیح دهید که هر یک از تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است: جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف) $\frac{۲a^۴+۵a^۳-۸a}{۴a^۲}=\frac{۲a^۴}{۴a^۲}+\frac{۵a^۳}{۴a^۲}-\frac{۸a}{۴a^۲}=\frac{۱}{۲}a^۲+\frac{۵}{۴}a-\frac{۲}{a}$

ب) $\frac{۱۴x^۳yz-۶xy+۳x^۲y^۲z^۲}{۲x^۲y^۲z}=\frac{۱۴x^۳yz}{۲x^۲y^۲z}-\frac{۶xy}{۲x^۲y^۲z}+\frac{۳x^۲y^۲z^۲}{۲x^۲y^۲z}=\frac{۷x}{y}-\frac{۳}{xyz}+\frac{۳z}{۲}$

ج) $(۸y^۳-۴y^۲+۱۲y)+(-۴y^۲)=\frac{۸y^۳-۴y^۲+۱۲y}{-۴y^۲}=\frac{۸y^۳}{-۴y^۲}-\frac{۴y^۲}{-۴y^۲}+\frac{۱۲y}{-۴y^۲}=-۲y+۱-\frac{۳}{y}$

برای انجام هر یک از این تقسیم‌ها ابتدا تک تک جمله‌های صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم، سپس کسرها را ساده می‌کنیم.

BIAMOZ.com

کار در کلاس

۱۲۷

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-\cancel{21}^{3}\ a^{6}\ \cancel{a}^{7}\ \cancel{b}^{4}c}{\cancel{28}^{4}\ \cancel{a}\ \cancel{b}^{6}_{b^{2}}} = \frac{-3a^{6}c}{4b^{2}}$

ب) $\frac{24x^{6}y - 2z + 3xyz}{x^{2}z} = \frac{24x^{6}y}{x^{2}z} - \frac{2z}{x^{2}z} + \frac{3xyz}{x^{2}z} = \frac{24x^{4}y}{z} - \frac{2}{x^{2}} + \frac{3y}{x}$

فعالیت

۱۲۸

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

باقیمانده این تقسیم چیست؟ $9x+1$

الف)

$$\begin{array}{r|l} 4x^{3}-3x^{2}+x+7 & x^{2}-2 \\ \pm 4x^{3} \quad \mp 8x & \boxed{4x}-3 \\ \hline -3x^{2}+9x+7 & \\ -3x^{2} \quad + \boxed{+6} & \\ \hline \boxed{9x}+1 & \end{array}$$

ب)

$$\begin{array}{r|l} x^{2}-5x-24 & x-8 \\ \pm x^{2} \mp 8x & \boxed{x}+\boxed{3} \\ \hline 3x-24 & \\ \pm 3x \mp 24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

۲- تقسیم زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید. حل را کامل کنید.

رابطه‌های تقسیم:

$(5x^{2}+\boxed{6})(2x^{2}-3)+2x-\boxed{1}$

$=10x^{4}-15x^{2}+12x^{2}-18+2x-1$

$=10x^{4}-3x^{2}+2x-19$

و درجه چندجمله‌ای $\boxed{1}-2x$ از درجه $2x^{2}-3$ کمتراست.

$$\begin{array}{r|l} 10x^{4}-3x^{2}+2x-19 & -3+2x^{2} \\ 10x^{4}-3x^{2}+2x-19 & 2x^{2}-3 \\ \pm 10x^{4} \mp 15x^{2} & 5x^{2}+\boxed{6} \\ \hline 12x^{2}+2x-19 & \\ \pm 12x^{2} \mp 18 & \\ \hline 2x-\boxed{1} & \end{array}$$

کار در کلاس

۱۲۹

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف)

$$\begin{array}{r|l} 6x^{3}-19x^{2}+16x-4 & 2-x \\ 6x^{3}-19x^{2}+16x-4 & -x+2 \\ \pm 6x^{3} \mp 12x^{2} & -6x^{2}+7x-2 \\ \hline -7x^{2}+16x-4 & \\ \mp 7x^{2} \pm 14x & \\ \hline 2x-4 & \\ \pm 2x \mp 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ب)

$$\begin{array}{r|l} -x^{3}-12+8x & x+6 \\ -x^{3}+8x-12 & x+6 \\ \mp x^{3} \mp 6x^{2} & -x^{2}+6x-28 \\ \hline +6x^{2}+8x-12 & \\ \pm 6x^{2} \pm 36x & \\ \hline -28x-12 & \\ \mp 28x \mp 168 & \\ \hline 156 & \end{array}$$

BIAMOZ.com

تمرین

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-\overset{۱}{\cancel{۱۸}}\overset{x}{\cancel{x^{۲}}}y^{۳}\overset{z^{۲}}{\cancel{z^{۵}}}}{\underset{۹}{\cancel{۱۸}}\underset{۱}{\cancel{x}}\underset{۱}{\cancel{z^{۵}}}} = \frac{-۱}{۹}xy^{۳}z^{۲}$

ب) $\frac{۲a^{۳}y - a^{۴}y^{۲} + ۱۵xy}{-۵y^{۲}} = \frac{۲a^{۳}y}{-۵y^{۲}} - \frac{a^{۴}y^{۲}}{-۵y^{۲}} + \frac{۱۵xy}{-۵y^{۲}} = \frac{-۲a^{۳}}{۵y} + \frac{a^{۴}}{۵} - \frac{۳x}{y}$

ج) $(x^{۳}-۲۷)\div(x-۲)$

$$\begin{array}{l|l} x^{۳}-۲۷ & x-۲ \\ \pm x^{۳} \mp ۲x^{۲} & x^{۲}+۲x+۴ \\ \hline ۲x^{۲}-۲۷ & \\ \pm ۲x^{۲} \mp ۴x & \\ \hline ۴x-۲۷ & \\ \pm ۴x \mp ۸ & \\ \hline -۱۹ & \end{array}$$

د) $(۳y^{۲}-۱۰y-۲۴)\div(۳y-۴)$

$$\begin{array}{l|l} ۳y^{۲}-۱۰y-۲۴ & ۳y-۴ \\ \pm ۳y^{۲} \mp ۴y & y-۲ \\ \hline -۶y-۲۴ & \\ \mp ۶y \pm ۸ & \\ \hline -۳۲ & \end{array}$$

هـ)

$$\begin{array}{l|l} ۲x^{۵}+۵x^{۴}-۲x^{۳}+۲x^{۲}-۲x+۳ & x+۳ \\ \pm ۲x^{۵} \pm ۶x^{۴} & ۲x^{۴}-x^{۳}+x^{۲}-x+۱ \\ \hline -x^{۴}-۲x^{۳}+۲x^{۲}-۲x+۳ & \\ \mp x^{۴} \mp ۳x^{۳} & \\ \hline x^{۳}+۲x^{۲}-۲x+۳ & \\ \pm x^{۳} \pm ۳x^{۲} & \\ \hline -x^{۲}-۲x+۳ & \\ \mp x^{۲} \mp ۳x & \\ \hline x+۳ & \\ \pm x \pm ۳ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط تقسیم نشان دهید.

$$\begin{array}{l|l} -۳x^{۴}+۴x^{۶}+x^{۲}+۵ & ۱-x^{۳} \\ +۴x^{۶}-۳x^{۴}+x^{۲}+۵ & -x^{۳}+۱ \\ \hline \pm ۴x^{۶} \mp ۴x^{۳} & -۴x^{۳}+۳x-۴ \\ \hline -۳x^{۴}+۴x^{۳}+x^{۲}+۵ & \\ \pm ۳x^{۴} \mp ۳x & \\ \hline ۴x^{۳}+x^{۲}-۳x+۵ & \\ \pm ۴x^{۳} \mp ۴ & \\ \hline x^{۲}-۳x+۹ & \end{array}$$

رابطه‌های تقسیم به صورت زیر می‌باشند:

۱- درجه عبارت باقی‌مانده از درجه مقسوم علیه $(-x^{۳}+۱)$ کمتر است.

۲- $(-x^{۳}+۱)(-۴x^{۳}+۳x+۴)+(-x^{۲}-۳x+۹)=-۴x^{۶}-۳x^{۴}+x^{۲}+۵$

BIAMOZ.com

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر $۲x^۳+۱۵x^۲+۲۸x$ است. اگر ارتفاع این جعبه x و طول آن $x+۴$ باشد، عرض آن را به‌دست آورید.

ارتفاع × عرض × طول = حجم مکعب مستطیل

$\Rightarrow$ عرض = (حجم مکعب مستطیل) + $(x(x+۴))$

$x^۲+۴x$

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳+۱۵x^۲+۲۸x & x^۲+۴x \\ \hline \pm ۲x^۳ \pm ۸x^۲ & ۲x+۷ \\ \hline ۷x^۲+۲۸x & \\ \pm ۷x^۲ \pm ۲۸x & \\ \hline ۰ & \end{array} \quad \Rightarrow \text{عرض} = ۲x+۷$$

۴- اگر چندجمله‌ای $۲۰x^۳+۲۳x^۲-۱۰x+a$ بر $۴x+۳$ بخش‌پذیر باشد، a را به دست آورید.

باید باقی‌مانده تقسیم $۲۰x^۳+۲۳x^۲-۱۰x+a$ بر $۴x+۳$ برابر با صفر باشد.

$$\begin{array}{r|l} ۲۰x^۳+۲۳x^۲-۱۰x+a & ۴x+۳ \\ \hline \pm ۲۰x^۳ \pm ۱۵x^۲ & ۵x^۲+۲x-۴ \\ \hline ۸x^۲-۱۰x+a & \\ \pm ۸x^۲ \pm ۶x & \\ \hline -۱۶x+a & \\ \pm ۱۶x \mp ۱۲ & \\ \hline +۱۲+a & \end{array}$$

$\Rightarrow ۱۲+a=۰ \Rightarrow a=-۱۲$

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت $۲x^۲-۹x+۹$ را بر هریک از عبارت‌های زیر به دست آورید.

$x+۳, x-۳, ۲x-۳, ۲x+۳$

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۲-۹x+۹ & x+۳ \\ \hline \pm ۲x^۲ \pm ۶x & ۲x-۱۵ \\ \hline -۱۵x+۹ & \\ \mp ۱۵x \mp ۴۵ & \\ \hline ۵۴ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۲x^۲-۹x+۹ & x-۳ \\ \hline \pm ۲x^۲ \mp ۶x & ۲x-۳ \\ \hline -۳x+۹ & \\ \mp ۳x \pm ۹ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۲-۹x+۹ & ۲x-۳ \\ \hline \pm ۲x^۲ \mp ۳x & x-۳ \\ \hline -۶x+۹ & \\ \mp ۶x \pm ۹ & \\ \hline ۰ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۲x^۲-۹x+۹ & ۲x+۳ \\ \hline \pm ۲x^۲ \pm ۳x & x-۶ \\ \hline -۱۲x+۹ & \\ \mp ۱۲x \mp ۱۸ & \\ \hline ۲۷ & \end{array}$$

طبق باقیمانده‌های به‌دست آمده، چندجمله‌ای $۲x^۲-۹x+۹$ بر $(x-۳)$ و $(۲x-۳)$ بخش‌پذیر است:

$$۲x^۲-۹x+۹=(۲x-۳)(x-۳)$$

BIAMOZ.com

ارزشیابی مستمر

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (۲نمره)

الف) $\frac{۲۱x^۲y-۱۴xy^۲+۲۸x^۲y^۲}{۴۲xy}$ ب) $\frac{۴x^۳+۳x}{۲x^۲}$

۲- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و برای هر یک رابطه تقسیم را بنویسید. (۳)

الف) $(۳x-۴x^۲+۱)+(x-۲)$ ب) $۲x^۳-۴x+۱ \mid x+۳$

۳- آیا چندجمله‌ای $x^۳-۱$ بر چند جمله‌ای $x^۲+x+۱$ بخش‌پذیر است؟ (۱)

۴- مقدار m را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $۲x^۳+x^۲-۴x+m$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد. (۲)

۵- مساحت یک متوازی‌الاضلاع $۳x^۲-۲x-۵$ و ارتفاع آن $۳x-۵$ می‌باشد. قاعده این متوازی‌الاضلاع را تعیین کنید. (۲)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱

الف) $\frac{۲۱x^۲y-۱۴xy^۲+۲۸x^۲y^۲}{۴۲xy}=\frac{۲۱x^۲y}{۴۲xy}-\frac{۱۴xy^۲}{۴۲xy}+\frac{۲۸x^۲y^۲}{۴۲xy}$ (۰/۵)

$=\frac{x}{۲}-\frac{y}{۳}+\frac{۲xy}{۳}$ (۰/۵)

ب) $\frac{۴x^۳+۳x}{۲x^۲}=\frac{۴x^۳}{۲x^۲}+\frac{۳x}{۲x^۲}=۲x+\frac{۳}{۲x}$ (۱)

۲ الف)

$-۴x^۲+۳x+۱ \mid x-۲$

$-(-۴x^۲+۸x)$ — $-۴x-۵$ (۱)

$-۵x+۱$

$-(-۵x+۱۰)$

-۹

رابطه تقسیم: درجه (-۹) < درجه $(x-۲)$ (۰/۲۵)

$-۴x^۲+۳x+۱=(x-۲)(-۴x-۵)+(-۹)$ (۰/۲۵)

ب)

$۲x^۳-۴x+۱ \mid x+۳$

$-(۲x^۳+۶x^۲)$ — $۲x^۲-۶x+۱۴$ (۱)

$-۶x^۲-۴x+۱$

$-(-۶x^۲-۱۸x)$

$۱۴x+۱$

$-(۱۴x+۴۲)$

-۴۱

رابطه تقسیم: درجه (-۴۱) < درجه $(x+۳)$ (۰/۲۵)

$۲x^۳-۴x+۱=(x+۳)(۲x^۲-۶x+۱۴)+(-۴۱)$ (۰/۲۵)

BIAMOZ.com

۳ اگر باقیمانده تقسیم $(x^۳-۱)$ بر $(x^۲+x+۱)$ برابر صفر باشد، بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۱ & x^۲+x+۱ \\ \hline -(x^۳+x^۲+x) & x-۱ \\ \hline -x^۲-x-۱ & \\ -(-x^۲-x-۱) & \\ \hline ۰ & \end{array} \qquad (۰/۵)$$

چند جمله ای $x^۳-۱$ بر چند جمله‌ای $x^۲+x+۱$ بخش‌پذیر است. (۰/۵)

۴ باید باقی‌مانده تقسیم $۲x^۳+x^۲-۴x+m$ بر $x-۱$ را برابر صفر قرار دهیم.(۰/۵)

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳+x^۲-۴x+m & x-۱ \\ \hline -(۲x^۳-۲x^۲) & ۲x^۲+۳x-۱ \\ \hline ۳x^۲-۴x+m & \\ -(۳x^۲-۳x) & \\ \hline -x+m & \\ -(-x+۱) & \\ \hline m-۱ & \end{array} \qquad (۱)$$

$$\Rightarrow m-۱=۰ \Rightarrow m=۱ \qquad (۰/۵)$$

۵ باید مساحت را بر ارتفاع تقسیم کنیم تا قاعده به‌دست آید.

$$\begin{array}{r|l} ۳x^۲-۲x-۵ & ۳x-۵ \\ \hline -(۳x^۲-۵x) & x+۱ \\ \hline ۳x-۵ & \\ -(۳x-۵) & \\ \hline ۰ & \end{array} \qquad (۱)$$

$$\Rightarrow \text{قاعده} = x+۱ \qquad (۱)$$

ریاضی

آزمون تلفیقی

مبحث: فصل ۷ — مدت: ..... — تاریخ: ...../...../.....

۱- در عبارت‌های زیر دور عبارت‌های گویا خط بکشید. ۰/۵

الف) $\frac{۳x^۲-۱}{x+۵}$ ب) $\frac{۴x^۲-۳}{\sqrt[۳]{x}}$ ج) $\frac{۲^x-۱}{۳}$ د) $\frac{\sqrt{۳}x}{۲y-۱}$

۲- عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید. ۱

الف) $\frac{۳x-x^۲}{x^۲-۹}$ ب) $\frac{x^۲-۲x-۸}{x^۲+۴x+۴}$

۳- مشخص کنید عبارت گویای $\frac{۲}{x^۲-۳x+۲}$ به ازای چه مقادیری برای x تعریف نشده است؟ ۰/۵

۴- حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید. ۳

الف) $\frac{a^۲-۴a-۵}{a^۲-۴a} \div \frac{a^۲+۳a+۲}{a-۴}$ ب) $\frac{۲x^۲-۱۶}{x^۲-۴} - \frac{x+۴}{x+۲}$

۵- عبارت گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید. ۲

$$\frac{۱-\frac{۱}{x}-\frac{۶}{x^۲}}{۱-\frac{۴}{x}+\frac{۳}{x^۲}}$$

BIAMOZ.com

۶- تقسیم‌های زیر را انجام دهید. ۲

الف) $\frac{۴x^۲yz - ۳۰xy^۲z - ۱۰x^۲y^۲z^۲}{۴x^۲yz^۲}$ ب) $۹x^۳ - ۴x + ۱ \,\big|\, x + ۱$

۷- اگر چند جمله‌ای $۳x^۲ - ۲x + a$ بر چند جمله‌ای $x + ۲$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را بیابید. ۱

پاسخ آزمون تلفیقی فصل ۷

۱ الف) $\frac{۳x^۲ - ۱}{x + ۱}$ (۰/۲۵) ، $\frac{\sqrt{۳}x}{۲y - ۱}$ (۰/۲۵)

۲ الف) $\frac{۳x - x^۲}{x^۲ - ۹} = \frac{x(۳ - x)}{(x - ۳)(x + ۳)} = \frac{x}{x + ۳}$ (۰/۵)

ب) $\frac{x^۲ - ۲x - ۸}{x^۲ + ۴x + ۴} = \frac{(x - ۴)(x + ۲)}{(x + ۲)^۲} = \frac{x - ۴}{x + ۲}$ (۰/۵)

۳ به ازای $x = ۱$ و $x = ۲$ تعریف نشده است. (۰/۵) $\frac{۲}{x^۲ - ۳x + ۲} = \frac{۲}{(x - ۱)(x - ۲)} \Rightarrow x \neq ۱, x \neq ۲$ (۰/۵)

۴ الف) $\frac{a^۲ - ۴a - ۵}{a^۲ - ۴a} + \frac{a^۲ + ۳a + ۲}{a - ۴} = \frac{(a + ۱)(a - ۵)}{a(a - ۴)} \times \frac{a - ۴}{(a + ۱)(a + ۲)} = \frac{a - ۵}{a(a + ۲)}$ (۰/۵) (۰/۵)

ب) $\frac{۲x^۲ - ۱۶ - (x + ۴)(x - ۲)}{x^۲ - ۴} = \frac{۲x^۲ - ۱۶ - x^۲ - ۲x + ۸}{x^۲ - ۴} = \frac{x^۲ - ۲x - ۸}{x^۲ - ۴} = \frac{(x - ۴)(x + ۲)}{(x - ۲)(x + ۲)}$ (۰/۵) (۰/۵)

۵

$$\frac{۱ - \frac{۱}{x} - \frac{۶}{x^۲}}{۱ - \frac{۴}{x} + \frac{۳}{x^۲}} = \frac{\frac{x^۲ - x - ۶}{x^۲}}{\frac{x^۲ - ۴x + ۳}{x^۲}} = \frac{x^۲ - x - ۶}{x^۲} \times \frac{x^۲}{x^۲ - ۴x + ۳}$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$= \frac{(x - ۳)(x + ۲)}{x^۲} \times \frac{x^۲}{(x - ۳)(x - ۱)} = \frac{x + ۲}{x - ۱}$$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۵)

۶ الف) $\frac{۴x^۲yz - ۳۰xy^۲z - ۱۰x^۲y^۲z^۲}{۴x^۲yz^۲} = \frac{۴x^۲yz}{۴x^۲yz^۲} - \frac{۳۰xy^۲z}{۴x^۲yz^۲} - \frac{۱۰x^۲y^۲z^۲}{۴x^۲yz^۲} = \frac{۱}{z} - \frac{۱۵y}{۲xz} - \frac{۵y}{۲}$ (۰/۵) (۰/۲۵)

ب)

$$\begin{array}{r|l} ۹x^۳ - ۴x + ۱ & x + ۱ \\ \hline -(۹x^۳ + ۹x^۲) & ۹x^۲ - ۹x + ۵ \quad (۰/۵) \\ \hline -۹x^۲ - ۴x + ۱ & \\ -(-۹x^۲ - ۹x) & \\ \hline ۵x + ۱ & \\ -(۵x + ۵) & \\ \hline -۴ \quad (۰/۵) & \end{array}$$

BIAMOZ.com

۷ باید باقی‌مانده تقسیم $3x^2-2x+a$ بر $x+2$ برابر با صفر باشد.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-2x+a & x+2 \\ \hline -(3x^2+6x) & 3x-8 \\ \hline -8x+a & \\ -(-8x-16) & \\ \hline a+16 & \end{array} \qquad (0/25)$$

$$a+16=0 \Rightarrow a=-16 \qquad (0/25)$$

(0/5)

فصل ۸ حجم و مساحت

درس ۱ حجم و مساحت کره

چکیده درس:

نکته۱: طبق آنچه در سال‌های گذشته آموخته‌اید حجم‌های منشوری (منشور و استوانه) با فرمول زیر قابل محاسبه هستند.

حجم منشور یا استوانه $\rightarrow V=Sh \leftarrow$ ارتفاع

$\downarrow$ مساحت قاعده

نکته۲: اگر شعاع قاعده یک استوانه R و ارتفاع آن h باشد، حجم استوانه را می‌توان با فرمول زیر نیز بیان کرد:

$$V=\pi R^2 h$$

نکته۳: مساحت جانبی منشور و استوانه از رابطه زیر به‌دست می‌آید. البته می‌توان بدون استفاده از این فرمول و با محاسبه مساحت وجه‌های جانبی و جمع کردن آن‌ها نیز مساحت جانبی را حساب کرد.

مساحت جانبی منشور یا استوانه $= ph \leftarrow$ ارتفاع

$\downarrow$ محیط قاعده

نکته۴: اگر شعاع قاعده یک استوانه R و ارتفاع آن h باشد، مساحت جانبی استوانه با فرمول زیر به‌دست می‌آید.

مساحت جانبی استوانه $= 2\pi Rh$

مثال: حجم و مساحت جانبی استوانهٔ زیر را حساب کنید.



حجم $\rightarrow V=\pi R^2 h=\pi\times 3^2\times 5=45\pi$

مساحت جانبی $\rightarrow S_{\text{جانبی}}=2\pi Rh=2\pi\times 3\times 5=30\pi$

نکته۵: مجموعه نقاطی از فضا را که فاصله آن‌ها از نقطه ثابتی به نام مرکز مقدار ثابتی باشد کره و آن مقدار ثابت را شعاع کره می‌گوییم. حجم و مساحت کره از رابطه زیر به‌دست می‌آید: (R شعاع کره است)

حجم کره $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

مساحت کره $S=4\pi R^2$

مثال: حجم و مساحت کره‌ای به شعاع ۶ را بیابید.

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\times\pi\times 6^3=288\pi$$

$$S=4\pi R^2=4\times\pi\times 6^2=144\pi$$

مثال: شعاع کره‌ای را بیابید که حجم و مساحت آن با هم برابر باشند.

$$V=S \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3=4\pi R^2$$

طرفین را بر $4\pi R^2$ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2}=\frac{4\pi R^2}{4\pi R^2}=1 \Rightarrow \frac{R}{3}=1 \Rightarrow R=3$$

فعالیت

۱- به تعریف دایره به‌عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همهٔ آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصلهٔ ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.

با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید

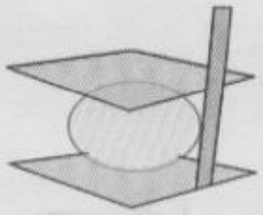


BIAMOZ.com

کره مجموعه نقاطی **از فضا است که** فاصله آنها از یک نقطه ثابت به‌نام **مرکز** به یک اندازه **هستند. به این اندازه** شعاع کره **می‌گوییم.**

۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعّالیت راه محاسبهٔ حجم کره را پیدا کنیم.

- **یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.**
- **مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی قطر کره را اندازه بگیرید.**



- **مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به‌طوری که توپ کروی به‌طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس شود.**



در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعدهٔ آن را بر حسب R نشان دهید.

در کلاس هفتم یاد گرفتید

ارتفاع استوانه : $۲R$

شعاع قاعده استوانه : R

حجم استوانه : $\pi R^{۲}h = \pi R^{۲}(۲R) = ۲\pi R^{۳}$

- **توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را ببرید تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم‌کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم‌کره دیگر را از آب پر کنید و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود، با ۲ نیم‌کره فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.**



الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم‌کره است؟ ۳ برابر حجم نیم‌کره است.

ب) حجم استوانه، چند برابر حجم کره است؟ ۱/۵ برابر حجم کره است.

ج) بنابراین حجم کره $\frac{۲}{۳}$ **برابر حجم استوانه است.**

د) با توجه به دستور محاسبهٔ حجم استوانه، که در بالا ذکر شد، دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به‌دست آورید.

$$\text{حجم کره} = \frac{۲}{۳} \times (\text{حجم استوانه}) = \frac{۲}{۳} \times ۲\pi R^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$$

کار در کلاس ۱۳۲

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر محاط شده است.

الف) حجم کره را به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{l}\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} \\ \text{شعاع کره} = ۵\end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{۴}{۳}\pi \times ۵^{۳} = \frac{۵۰۰}{۳}\pi$$

ب) حجم استوانه را به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{l}\text{حجم استوانه} = \pi R^{۲}h \\ \text{ارتفاع} = ۱۰ \\ \text{شعاع قاعده} = ۵\end{array}\right\} \Rightarrow V = \pi \times ۵^{۲} \times ۱۰ = ۲۵۰\pi$$

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به‌دست آورید.

$$\text{حجم فضای بین کره و استوانه} = \text{حجم استوانه} - \text{حجم کره} = ۲۵۰\pi - \frac{۵۰۰}{۳}\pi = \frac{۷۵۰\pi - ۵۰۰\pi}{۳} = \frac{۲۵۰}{۳}\pi$$

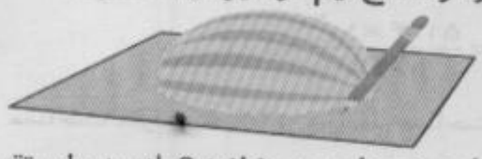
BIAMOZ.com

۲- حجم نیم‌کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را به‌دست آورید.

$$\text{حجم نیم‌کره} = \frac{۱}{۲} \times \text{حجم کره} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۳}\pi R^۳\right) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳} \times \pi \times ۱۰^۳ = \frac{۲۰۰۰}{۳}\pi$$

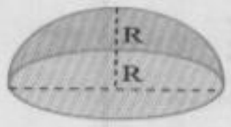
فعالیت ۱۳۳

۱- مانند شکل مقابل، نیم‌کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به‌دست آوردید، روی یک صفحهٔ کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم‌کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بپوشاند. این دو دایره کاغذی را هرطور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم‌کره بچسبانید. مراقب باشید تا حد امکان، کاغذها روی هم قرار نگیرد و سطح نیم‌کره نیز دیده نشود!



آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم‌کره را با این دو دایره بپوشانید؟ بله، به طور تقریبی، توانستیم روی نیم‌کره را بپوشانیم.
در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید. از آنجا که سطح رویه کره مسطح نیست، پوشاندن آن با یک سطح مسطح مثل کاغذ دشوار است و اگر کاغذ برش نخورد، نمی‌توان با تقریب خوبی سطح رویه نیم کره را پوشانید. اگر تعداد برش‌ها را زیاد کنیم می‌توانیم دقت کار را افزایش دهیم.

۲- ثابت می‌شود که مساحت رویهٔ یک نیم‌کره با شعاع R، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم‌کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم‌کره).



الف) پس مساحت رویهٔ نیم‌کره برابر است با: $۲\pi R^۲$

ب) درنتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با: $۴\pi R^۲$

کار در کلاس ۱۳۳

۱- مساحت یک کلاه (عرق‌چین) به شکل رویهٔ نیم‌کره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را پیدا کنید.

$$\text{مساحت رویه نیم‌کره} = ۲\pi R^۲ = ۲ \times \pi \times ۱۰^۲ = ۲۰۰\pi$$

۲- می‌خواهیم یک نیم‌کره چوبی توپر به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.

$$\text{مساحت کل نیم‌کره} = \text{مساحت قاعده} + \text{مساحت رویه نیم‌کره} = ۲\pi R^۲ + \pi R^۲$$
$$= ۳\pi \times ۱۰^۲ = ۳\pi \times ۱۰۰ = ۳۰۰\pi$$

بین محاسبه مساحت کل نیم‌کره چوبی توپر و مساحت رویه یک عرق‌چین چه تفاوتی هست؟ در محاسبه مساحت کل نیم‌کره چوبی می‌بایست مساحت قاعده نیم‌کره را نیز در نظر بگیریم درحالی‌که عرق‌چین سطح این قاعده را ندارد.

تمرین ۱۳۴

۱- قطر تقریبی کرهٔ زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.

الف) قطر و شعاع کره زمین را برحسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

$$\text{قطر کره زمین} = ۱/۲۸ \times ۱۰^۴ \text{km}$$

$$\text{شعاع کره زمین} = \frac{۱۲۸۰۰}{۲} = ۶۴۰۰ = ۶/۴ \times ۱۰^۳ \text{km}$$

ب) قطر و شعاع کره زمین را برحسب متر. با نماد علمی بنویسید.

می‌دانیم هر کیلومتر برابر است با ۱۰۰۰ متر بنابراین داریم:

$$\text{قطر کره زمین} = ۱/۲۸ \times ۱۰^۴ \times ۱۰۰۰ = ۱/۲۸ \times ۱۰^۴ \times ۱۰^۳ = ۱/۲۸ \times ۱۰^۷ \text{m}$$

$$\text{شعاع کره زمین} = ۶/۴ \times ۱۰^۳ \times ۱۰۰۰ = ۶/۴ \times ۱۰^۳ \times ۱۰^۳ = ۶/۴ \times ۱۰^۶ \text{m}$$

BIAMOZ.com

ج) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.

$$\text{مساحت رویه کره زمین} = 4\pi R^2 = 4\pi \times (6/4 \times 10^6)^2 =$$

$$= 4 \times 3/14 \times 40/96 \times 10^{12} \simeq 5/144 \times 10^{14} \text{ متر مربع}$$

می‌دانیم هر ۱۰۰۰۰۰۰ متر مربع برابر است با یک کیلومتر مربع بنابراین:

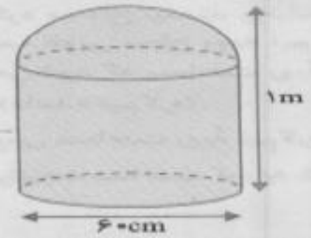
$$\text{مساحت رویه کره زمین} = \frac{5/144 \times 10^{14}}{1000000} = \frac{5/144 \times 10^{14}}{10^6} = 5/144 \times 10^8 \text{ کیلومتر مربع}$$

د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱،۶۴۸،۰۰۰ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

$$\frac{\text{مساحت کره زمین}}{\text{مساحت ایران}} = \frac{5/144 \times 10^8}{1648000} = \frac{5144 \times 10^2}{1648} \simeq 312$$

بنابراین ایران تقریباً $\frac{1}{312}$ کره زمین مساحت دارد. که ۰/۳۲ درصد مساحت کره زمین است.

۲- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم‌کره روی یک استوانه به‌صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کپسول ۶۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن یک متر باشد. حجم کپسول را بر حسب متر مکعب به‌دست آورید.



حجم کپسول = حجم استوانه + حجم نیم‌کره

شعاع نیم‌کره = شعاع قاعده استوانه = ۰/۳m

ارتفاع کپسول = ۰/۷m

$$\text{حجم کپسول} = (\pi \times (0/3)^2 \times 0/7) + \frac{2}{3} \times \pi \times (0/3)^3$$

$$= 0/063\pi + 0/018\pi = 0/081\pi \text{ متر مکعب}$$

اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم. چند کیلوگرم رنگ لازم است به شرط اینکه هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ احتیاج داشته باشد.

سطح کل کپسول = سطح جانبی استوانه + سطح نیم‌کره = سطح قاعده

$$= 2\pi Rh + 2\pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi Rh + 3\pi R^2$$

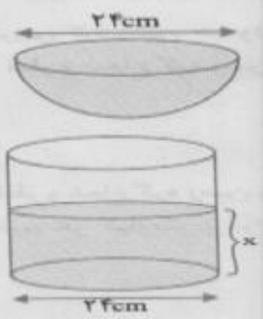
$$= 2\pi \times 0/3 \times 0/7 + 3\pi \times (0/3)^2 = 0/42\pi + 0/27\pi = 0/69\pi$$

$$= 0/69 \times 3/14 = 2/17 \text{ متر مربع}$$

$$\text{مقدار رنگ} = 2/17 \times 100 = 217 \text{ گرم}$$

۳- پیمانه‌ای به شکل نیم‌کره و به قطر ده‌انه ۲۴ سانتی‌متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

$$\text{حجم آب درون لیوان} = \text{حجم آب درون پیمانه} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{2}{3} \times \pi \times R^3 = \pi R^2 \times x$$



$$\Rightarrow \frac{2}{3} R = x$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \times 24 = 16 \text{ cm}$$

BIAMOZ.com

ارزشیابی مستمر

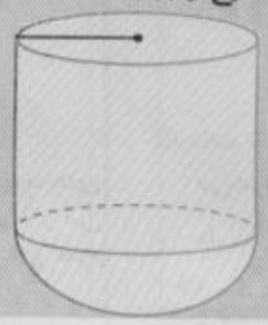
۱- کره مجموعه نقاطی از فضاست که فاصله آنها از نقطه ثابتی به نام ..... به یک اندازه است. (۱ نمره)
به این اندازه ثابت ..... می‌گویند.

۲- حجم کره‌ای به شعاع ۴ را بیابید. (مقدار π را برابر ۳ در نظر بگیرید.) (۲)

۳- مساحت یک نیم‌کره توپر فولادی به شعاع ۱۰ را بیابید. (مقدار π را برابر ۳ در نظر بگیرید.) (۲)

۴- حجم یک کره با مساحت آن برابر است. اندازه قطر این کره را بیابید. (۲)

۵- یک مخزن مطابق شکل از به‌هم پیوستن یک نیم‌کره و یک استوانه ساخته شده است. اگر شعاع قاعده استوانه ۱۰ باشد و ارتفاع استوانه ۵۰ باشد، حجم مخرج را بیابید. ($\pi = ۳$) (۲)



پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ مرکز کره (۰/۵)- شعاع کره (۰/۵)

۲ $V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$ (۰/۵) $\xrightarrow[\pi=۳]{R=۴} V = \frac{۴}{۳}\times ۳\times ۴^۳ = ۲۵۶$ (۱/۵)

۳ $S = \frac{۱}{۲}(۴\pi R^۲) \xrightarrow[\pi=۳]{R=۱۰} S = \frac{۱}{۲}(۴\times ۳\times ۱۰^۲) = ۶۰۰$ (۱) رویه نیم‌کره

$S = \pi R^۲ = ۳\times (۱۰)^۲ = ۳۰۰$ (۰/۵) قاعده نیم‌کره

$S = ۶۰۰ + ۳۰۰ = ۹۰۰$ (۰/۵) کل

۴ $V = S \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = ۴\pi R^۲$ (۱)

$\Rightarrow \frac{R}{۳} = ۱ \Rightarrow R = ۳ \Rightarrow$ قطر $d = ۶$ (۱)

۵ حجم استوانه $= \pi R^۲ h = ۳\times ۱۰^۲ \times ۵۰ = ۱۵۰۰۰$ (۰/۵)

حجم نیم‌کره $= \frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳}\pi R^۳) = \frac{۱}{۲}\times \frac{۴}{۳}\times ۳\times ۱۰^۳ = ۲۰۰۰$ (۱)

حجم کل $= ۱۵۰۰۰ + ۲۰۰۰ = ۱۷۰۰۰$ (۰/۵)

BIAMOZ.com

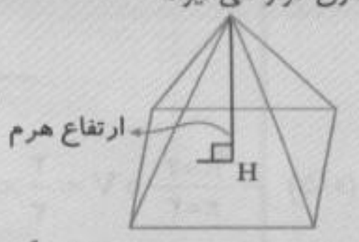
۲ درس حجم هرم و مخروط

چکیده درس:

نکته۶: هرم یک شکل فضایی است که وجه زیرین آن یک چند ضلعی است که قاعده نام دارد و بقیه وجه‌های آن مثلثی شکل هستند که از یک طرف به قاعده و از طرف دیگر به نقطه‌ای به‌نام رأس هرم محدود می شوند.
فاصله راس هرم تا قاعده را ارتفاع هرم می‌گویند.



نکته۷: اگر قاعده هرم یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی هرم همنهشت باشند، هرم را منتظم می‌گوئیم. در این صورت اگر قاعده مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع هرم روی مرکز تقارن قرار می‌گیرد.



نکته۸: حجم هر هرم که مساحت قاعده آن S و ارتفاع آن h باشد برابر است با یک سوم مساحت قاعده ضرب در ارتفاع. یعنی:

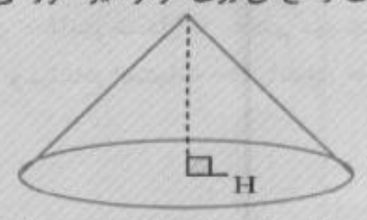
$$V = \frac{1}{3}Sh$$

مثال: حجم هرمی با قاعده‌ی مربع به ضلع ۳ و ارتفاع ۱۰ را بیابید.

$$\left.\begin{array}{rl} \text{مساحت قاعده} & \rightarrow S = 3^2 = 9 \\ \text{ارتفاع} & \rightarrow h = 10 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\times 9\times 10 = 30\ cm^3$$

نکته۹: مخروط شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن دایره‌ای شکل بوده و پای ارتفاع آن روی مرکز دایره قرار می‌گیرد.



نکته۱۰: حجم یک مخروط همانند حجم یک هرم محاسبه می‌شود. اگر شعاع قاعده مخروط R و ارتفاع مخروط h باشد داریم: $V = \frac{1}{3}Sh \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ حجم مخروط

مثال: حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۶ چند برابر حجم مخروطی به شعاع قاعده ۳۰ و ارتفاع ۲ است؟

طبق داده‌های مسئله $R = 2$ و $h = 6$ و $R' = 3$ و $h' = 2$ که به ترتیب شعاع قاعده و ارتفاع استوانه و مخروط هستند.

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi\times 2^2\times 6 = 24\pi$$

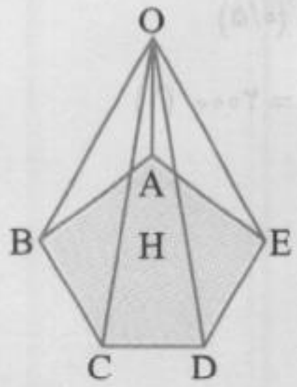
$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi R'^2 h' = \frac{1}{3}\pi\times 3^2\times 2 = 6\pi$$

$$\Rightarrow \frac{24\pi}{6\pi} = 4 \Rightarrow$$ حجم استوانه ۴ برابر حجم مخروط است.

سؤال متن ۱۳۵

یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. نمونهٔ دیگری از شکل‌های هرمی را نام ببرید. کلاه جشن تولد، میوه درخت کاج، وزنه شاقول، میخ کفاشی (توجه کنید که مخروط‌ها هم جزء حجم‌های هرمی هستند)

در هرم مقابل، نام رأس: O

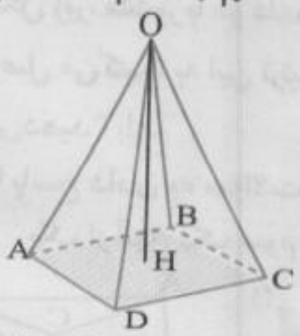


تعداد وجه ها: ۶
شکل وجه‌ها: مثلث
شکل قاعده: پنج ضلعی
نام قاعده: ABCDE

BIAMOZ.com

فعالیت

۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشند، هرم را منتظم می‌گوییم.

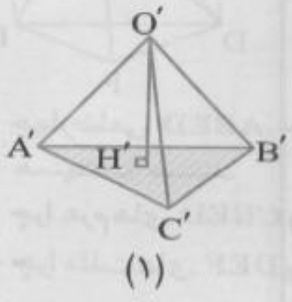


در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه‌ی برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد.

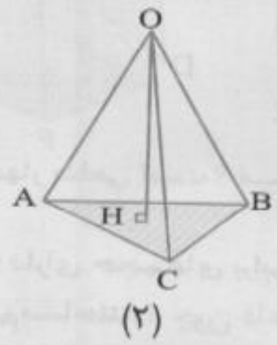
در هرم منتظم مقابل، نام رأس: O **ارتفاع:** OH **شکل قاعده:** مستطیل

شکل وجه‌های جانبی: مثلث متساوی‌الساقین **تعداد وجه‌ها:** ۵

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در شکل‌های (۱) و (۲) مثلث‌های قاعده هم‌نهشت هستند.



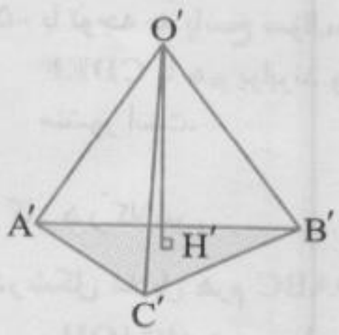
(۱)



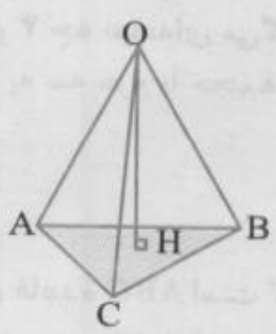
(۲)

$O'H' < OH \Rightarrow \quad V' \lessdot V$

در شکل‌های (۳) و (۴) ارتفاع‌ها برابر است.



(۳)



(۴)

$O'H' = OH \quad و \quad S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' \lessdot V$

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟ حجم هرم به مساحت قاعده و ارتفاع آن وابسته است.

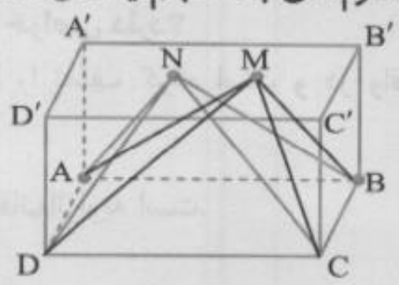
ج) برای محاسبهٔ مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می‌کردید؟ برای محاسبهٔ حجم هرم چه حدسی می‌زنید؟ از ارتفاع و قاعده مثلث استفاده می‌کردیم- حدس می‌زنیم که باید ارتفاع و قاعده هرم را در هم ضرب کنیم.

د) اگر دو هرم دارای قاعده‌های با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، دربارهٔ حجم‌های آنها چه می‌توانید بگویید؟ حجم آن‌ها برابر است.

کار در کلاس

در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطهٔ دلخواه روی وجه مقابل (A′B′C′D′) است. چرا هرم‌های MABCD و NABCD دارای حجم‌های یکسان است؟ چون مساحت قاعده و ارتفاع‌های دو هرم با هم برابر است.

به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا حجم یکسان داشته باشند؟ بی‌شمار هرم



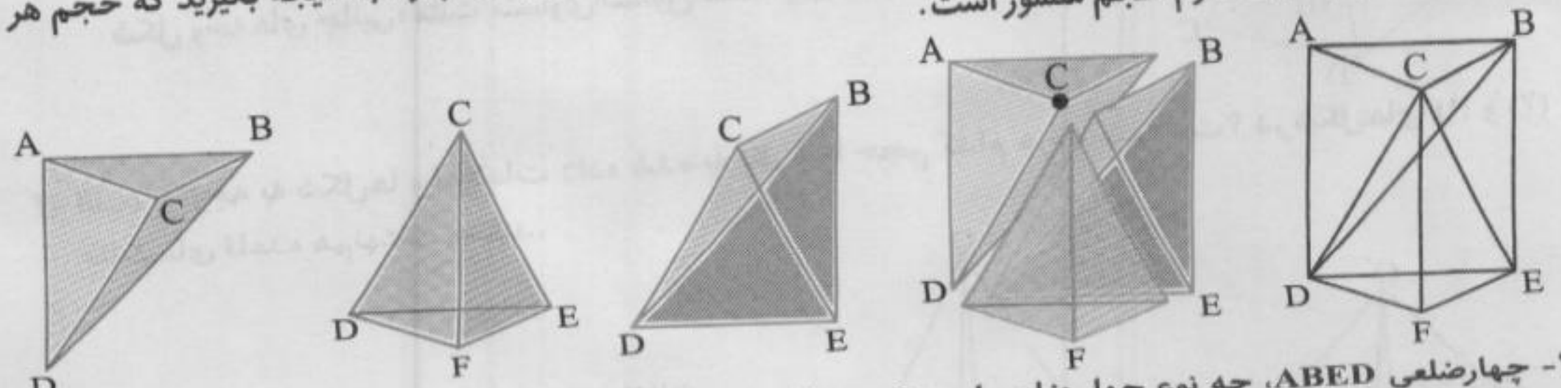
BIAMOZ.com

فعالیت

۱۳۷

در شکل زیر، منشور با دو قاعدهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{DEF}$ را ملاحظه می‌کنید. نقطهٔ C را به نقطه‌های E و D و نقطهٔ B را به نقطهٔ D وصل می‌کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می‌کنیم، آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می‌دهید؟ بله.

با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم‌های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.



۱- چهارضلعی ABED، چه نوع چهار ضلعی است؟ مستطیل است. چرا مثلث‌های ABD و BDE هم مساحتند؟ چون همنهشت هستند.

۲- چرا هرم‌های CBED و CBAD دارای حجم‌های برابر هستند؟ چون دارای قاعده و ارتفاع برابر هستند.

۳- چرا مثلث‌های DEF و ABC هم‌مساحتند؟ چون قاعده‌های منشور هستند.

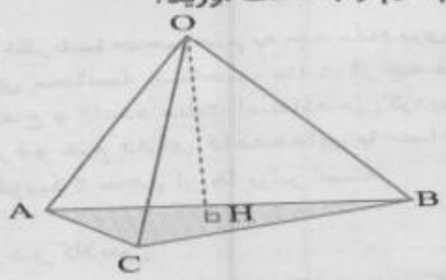
۴- چرا هرم‌های CDEF و DABC دارای حجم‌های برابر هستند؟ چون دارای قاعده و ارتفاع برابر هستند.

۵- با توجه به پاسخ سؤال‌های ۲ و ۴ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ نتیجه می‌گیریم حجم هر سه هرم CBAD و CBED و CDEF با هم برابرند و منشور به سه هرم با حجم‌های برابر تقسیم شده است. بنابراین حجم هرم یک سوم حجم منشور است.

کار در کلاس

۱۳۷

در شکل مقابل هرم OABC دارای قاعدهٔ ABC است که در آن $AC = ۶\,cm$ و $BC = ۱۰\,cm$ و زاویهٔ $A\hat{C}B = ۹۰^\circ$ و OH ارتفاع هرم مساوی ۵cm است. با کامل کردن عبارت‌های زیر حجم هرم را به‌دست آورید.



مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ACB را می‌توان از ضرب اضلاع زاویهٔ قائمه آن تقسیم به دو به دست آورد:

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{۲} = \frac{۶ \times ۱۰}{۲} = ۳۰\,cm^۲$$

و از آن‌جا حجم هرم را به دست می‌آوریم:

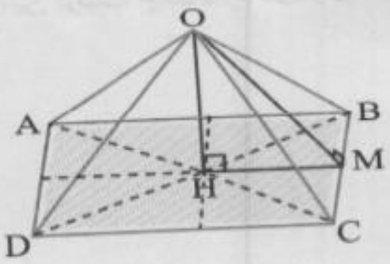
$$V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times ۳۰ \times ۵ = ۵۰\,cm^۳$$

فعالیت

۱۳۸

در شکل زیر، هرم منتظم با قاعدهٔ مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰cm و M وسط BC است.

الف) پاره‌خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟



OM ارتفاع مثلث OBC است و BC را نصف کرده است و در واقع وتر $\overset{\Delta}{OHM}$ مثلث قائم‌الزاویه است.

ب) مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ قائم‌الزاویه است.

BIAMOZ.com

ج) اگر طول ضلع قاعده، ۱۲ cm باشد به کمک قضیهٔ فیثاغورس، در مثلث OBM طول OM را حساب کنید.

$$OM^2 + BM^2 = BO^2 \Rightarrow OM^2 + ۶^2 = ۱۰^2 \Rightarrow OM^2 = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow OM = ۸$$

د) مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟ قائم‌الزاویه است. طول MH، ۶ سانتی‌متر است.

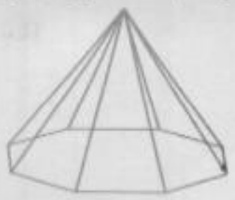
ه) به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را به‌دست آورید.

$$OM^2 = HM^2 + OH^2 \Rightarrow ۸^2 = ۶^2 + OH^2 \Rightarrow OH^2 = ۶۴ - ۳۶ = ۲۸$$
$$\Rightarrow OH = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷} \text{ cm}$$

و) حجم هرم OABCD را به‌دست آورید.

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times ۱۲^2 \times ۲\sqrt{۷} = ۹۶\sqrt{۷} \text{ cm}^3$$

۲- هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعدهٔ آن یک چند ضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و ... . حال تعداد ضلع‌های این چند ضلعی را بیشتر و بیشتر کنید. چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ به دایره نزدیک‌تر می‌شود. هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ به مخروط نزدیک می‌شود.

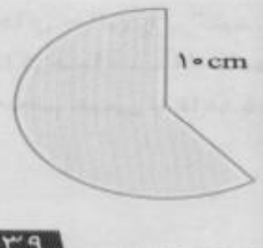


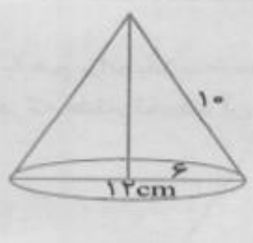


۱۳۹

کار در کلاس

علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰cm، مخروطی به قطر قاعدهٔ ۱۲ cm ساخته است. حجم این مخروط را به‌دست آورید.





$$\text{ارتفاع مخروط} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۶^2 \times ۸ = ۹۶\pi \text{ cm}^3$$

۱۳۹

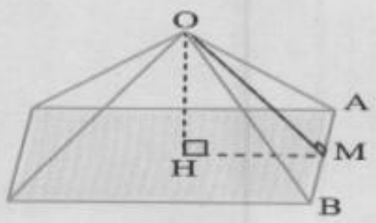
تمرین

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعدهٔ آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر باشد.



$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times ۵ \times ۶ \times ۱۰ = ۱۰۰ \text{cm}^3$$

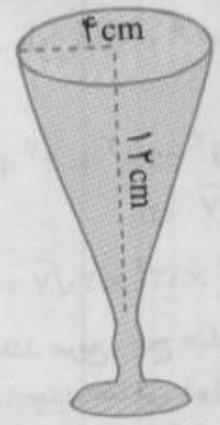
۲- حجم هرمی با قاعدهٔ مربع را به‌دست آورید که ضلع قاعدهٔ آن ۴cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸cm باشد.

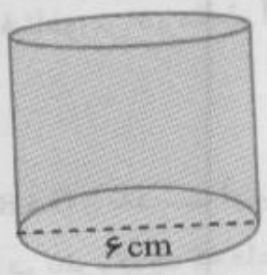


$$OA^2 = AM^2 + OM^2 \Rightarrow ۸^2 = ۲^2 + OM^2$$
$$\Rightarrow OM^2 = ۶۴ - ۴ = ۶۰$$
$$\Rightarrow OM = \sqrt{۶۰} = ۲\sqrt{۱۵}$$
$$OM^2 = HM^2 + OH^2 \Rightarrow ۶۰ = ۲^2 + OH^2$$
$$OH^2 = ۶۰ - ۴ \Rightarrow OH^2 = ۵۶ \Rightarrow OH = \sqrt{۵۶} = ۲\sqrt{۱۴}$$
$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times ۴^2 \times ۲\sqrt{۱۴} = \frac{۳۲}{۳}\sqrt{۱۴}$$

BIAMOZ.com

۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانهٔ ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل که شعاع قاعدهٔ آن ۶cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟





R_1 = شعاع قاعده مخروط

R_2 = شعاع قاعده استوانه

h = ارتفاع مخروط

x = ارتفاع استوانه

حجم آب درون استوانه= حجم آب درون مخروط

$$\frac{1}{3}\pi R_1^2 h = \pi R_2^2 x \Rightarrow \frac{1}{3}\times 4^2 \times 12 = 6^2 \times x \Rightarrow$$

$$64 = 36x \Rightarrow x = \frac{64}{36}$$

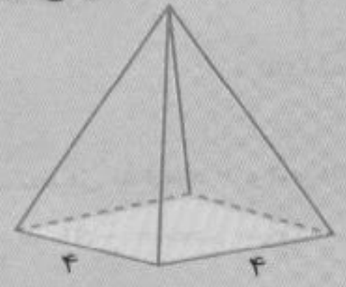
$$\Rightarrow x = \frac{16}{9}$$

ارزشیابی مستمر

۱- جای خالی را پر کنید. (۰/۵ نمره)

«اگر مساحت قاعده‌های دو هرم با هم برابر باشد حجم هرمی بیشتر است که ..... آن بیشتر باشد.»

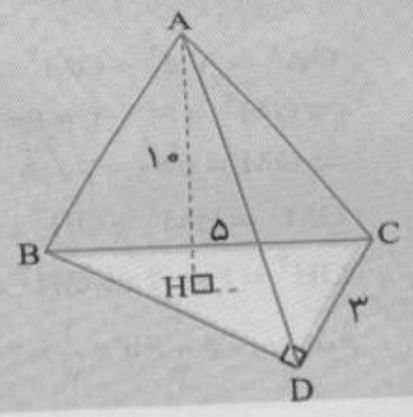
۲- حجم هرمی با قاعدهٔ مربع را بیابید که ضلع قاعده آن ۴ و ارتفاع آن ۶ باشد. (۲)



۳- اگر حجم یک مخروط برابر 24π باشد و ارتفاع آن برابر ۸ باشد شعاع قاعده مخروط را بیابید. (۲)

۴- اگر حجم یک استوانه و یک مخروط با ارتفاع‌های برابر، مساوی باشد، نسبت شعاع قاعده استوانه به شعاع قاعده مخروط را بیابید. (۲)

۵- حجم هرم مقابل را بیابید. $(AH = 10, BC = 5, DC = 3)$ (۲/۵)



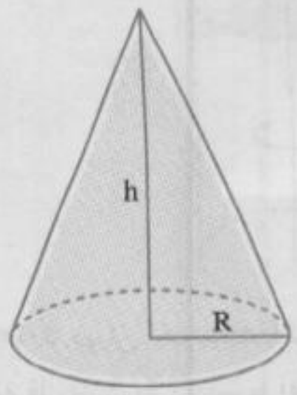
BIAMOZ.com

۱ ارتفاع (۰/۵)

۲

$$\left.\begin{array}{l} V=\frac{۱}{۳}Sh \\ S=۴\times۴=۱۶ \\ h=۶ \end{array}\right\}\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\times۱۶\times۶=۳۲ \quad (۱)$$

۳



$$\left.\begin{array}{l} V=\frac{۱}{۳}\pi R^۲h \\ V=۲۴\pi \\ h=۸ \end{array}\right\}\Rightarrow ۲۴\pi=\frac{۱}{۳}\times\pi\times R^۲\times۸ \quad (۱)$$

$$\Rightarrow R^۲=۹\Rightarrow R=۳ \quad (۰/۵)$$

۴ ارتفاع‌های مخروط و استوانه برابر است پس ارتفاع هر دو را برابر h در نظر می‌گیریم.

$V_۱$ = حجم استوانه

$V_۲$ = حجم مخروط

$R_۱$ = شعاع قاعده استوانه

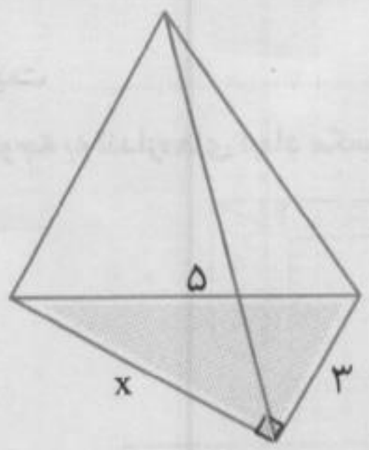
$R_۲$ = شعاع قاعده مخروط

$$V_۱=V_۲\Rightarrow \pi R_۱^۲h=\frac{۱}{۳}\pi R_۲^۲h \quad (۱)$$

$$\Rightarrow R_۱^۲=\frac{۱}{۳}R_۲^۲$$

$$\Rightarrow \frac{R_۱^۲}{R_۲^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{R_۱}{R_۲}=\sqrt{\frac{۱}{۳}} \quad (۱)$$

۵ چون قاعده یک مثلث قائم‌الزاویه است، مساحت قاعده را از ضرب اندازه‌های دو ضلع زاویه قائمه به دست می‌آوریم.



$$V=\frac{۱}{۳}Sh \quad (۰/۵)$$

$$x^۲+۳^۲=۵^۲\Rightarrow x^۲=۱۶\Rightarrow x=۴ \quad (۱)$$

$$S=\frac{۳\times۴}{۲}=۶\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}\times۶\times۱۰=۲۰ \quad (۱)$$

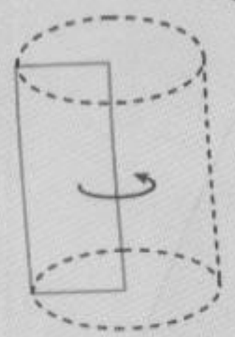
BIAMOZ.com

۲ درس سطح و حجم

چکیده درس:

نکته۱۱: برابری سطح کل دو شکل، برابری حجم آن دو شکل را نتیجه نمی‌دهد. همین‌طور از برابری حجم دو شکل نمی‌توان برابری سطح کل آن دو شکل را نتیجه گرفت.

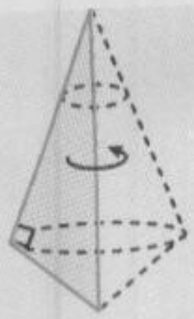
نکته۱۲: از دوران یک مستطیل حول یکی از ضلع‌هایش یک استوانه به‌دست می‌آید.



نکته۱۳: از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه‌اش یک مخروط به‌دست می‌آید.



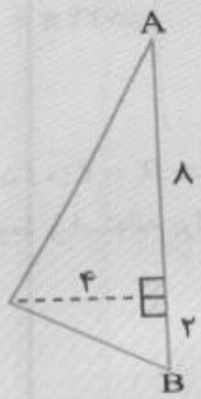
نکته۱۴: از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن شکلی پدید می‌آید که مانند دو مخروط به هم چسبیده است.



نکته۱۵: از دوران یک نیم دایره حول قطرش یک کره ایجاد می‌شود.

مثال: حجم حاصل از دوران شکل مقابل را حول ضلع AB به‌دست آورید.

اگر جسم مقابل را حول AB دوران دهیم دو مخروط به هم چسبیده با شعاع قاعده ۴ به‌دست می‌آید که ارتفاع یکی ۸ و ارتفاع دیگری ۲ است.



$$\left.\begin{array}{ll} \text{حجم مخروط بالایی} & = \frac{۱}{۳}\times\pi\times۴^۲\times۸ = \frac{۱۲۸}{۳}\pi \\ \text{حجم مخروط پایینی} & = \frac{۱}{۳}\times\pi\times۴^۲\times۲ = \frac{۳۲}{۳}\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\text{حجم کل} = \frac{۱۲۸}{۳}\pi + \frac{۳۲}{۳}\pi = \frac{۱۶۰}{۳}\pi$$

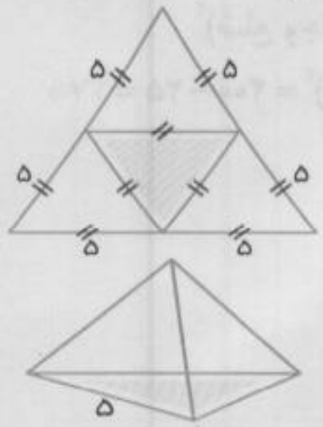
فعالیت

۱۴۰

۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گستردهٔ هر کدام مشخص کنید.

BIAMOZ.com

۲- مساحت گستردهٔ هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

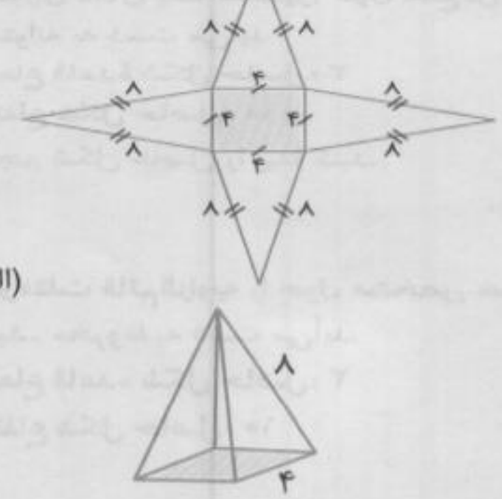


مساحت یک وجه × ۴ = مساحت گسترده

$$\text{ارتفاع وجه})^{۲} = ۵^{۲} - (\frac{۵}{۲})^{۲} = ۲۵ - \frac{۲۵}{۴} = \frac{۷۵}{۴}$$

$$\text{ارتفاع وجه} = \sqrt{\frac{۷۵}{۴}} = \frac{۵}{۲}\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت گسترده} = ۴ \times \frac{۵ \times \frac{۵}{۲}\sqrt{۳}}{۲} = \not{۴} \times \frac{۲۵}{\not{۴}}\sqrt{۳} = ۲۵\sqrt{۳}$$



(الف)

مساحت وجه × ۴ + مساحت قاعده = مساحت گسترده

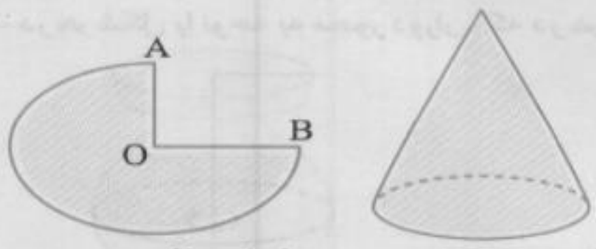
$$\text{ارتفاع وجه})^{۲} = ۸^{۲} - ۲^{۲} = ۶۴ - ۴ = ۶۰$$

$$\text{ارتفاع وجه} = \sqrt{۶۰} = ۲\sqrt{۱۵}$$

$$\text{مساحت گسترده} = ۴^{۲} + ۴ \times \frac{۴ \times ۲\sqrt{۱۵}}{۲} =$$

$$= ۱۶ + ۱۶\sqrt{۱۵}$$

۳- $\frac{۳}{۴}$ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را برداشته‌ایم؛ با کمک آن یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟



$$\text{طول کمان AB} = \frac{۳}{۴}\text{(محیط دایره)} = \frac{۳}{۴} \times ۲\pi \times ۱۰ = ۱۵\pi$$

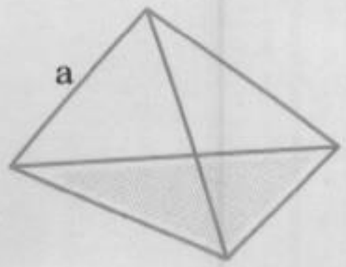
چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعدهٔ مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.

طول کمان AB برابر است با محیط دایره قاعده مخروط است.

$$\text{شعاع قاعده مخروط} \quad \text{محیط دایره قاعده مخروط} = ۱۵\pi \Rightarrow ۲\pi R = ۱۵\pi \Rightarrow R = \frac{۱۵}{۲}\text{cm}$$

کار در کلاس ۱۴۱

۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید که طول همهٔ یال‌های آن a است.



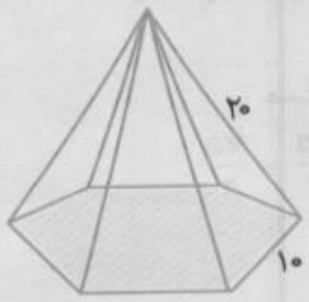
مساحت یک وجه × ۴ = مساحت کل هرم

$$= ۴ \times (\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \times a) \times \frac{۱}{۲}$$

$$= \sqrt{۳}a^{۲}\ \text{cm}^{۲}$$

BIAMOZ.com

۲- با توجه به اندازه ضلع قاعدهٔ شش ضلعی منتظم و اندازه یال هرم، مساحت جانبی هرم را پیدا کنید.



$(\text{ضلع وجه})^۲=(\text{نصف ضلع قاعده})^۲+(\text{ارتفاع یک وجه})^۲$

$(\text{ارتفاع وجه})^۲ +۵^۲ =۲۰^۲ \Rightarrow (\text{ارتفاع وجه})^۲ =۴۰۰-۲۵=۳۷۵$

$\text{ارتفاع وجه}=\sqrt{۳۷۵}=۵\sqrt{۱۵}$

$\text{مساحت جانبی هرم}=۶\times \text{مساحت یک وجه}=۶\times\frac{۵\sqrt{۱۵}\times ۱۰}{۲}=۱۵۰\sqrt{۱۵}\ \text{cm}^۲$

فعالیت

۱۴۱

۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می‌آید؟





استوانه به دست می‌آید

شعاع قاعدهٔ شکل حاصل: ۳

ارتفاع شکل حاصل: ۱۰

حجم شکل حاصل را پیدا کنید.

$\text{حجم استوانه}=\pi R^۲h=\pi\times ۳^۲\times ۱۰=۹۰\pi\ \text{cm}^۳$

۲- اگر مثلث قائم‌الزاویه را حول مشخص شده در شکل، دوران دهیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ حجم آن را پیدا کنید. مخروط به دست می‌آید.



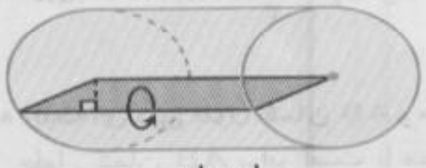


شعاع قاعده شکل حاصل: ۳

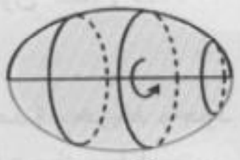
ارتفاع شکل حاصل: ۱۰

$\text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}\pi R^۲h=\frac{۱}{۳}\times\pi\times ۳^۲\times ۱۰=۳۰\pi$

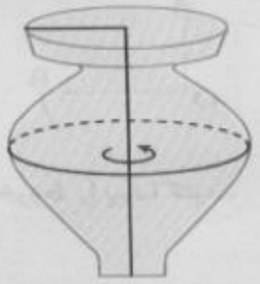
۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.



استوانه



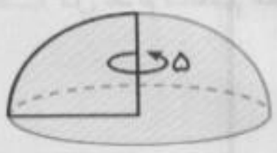
کره



کار در کلاس

۱۴۲

حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع 5cm را حول شعاع آن پیدا کنید.



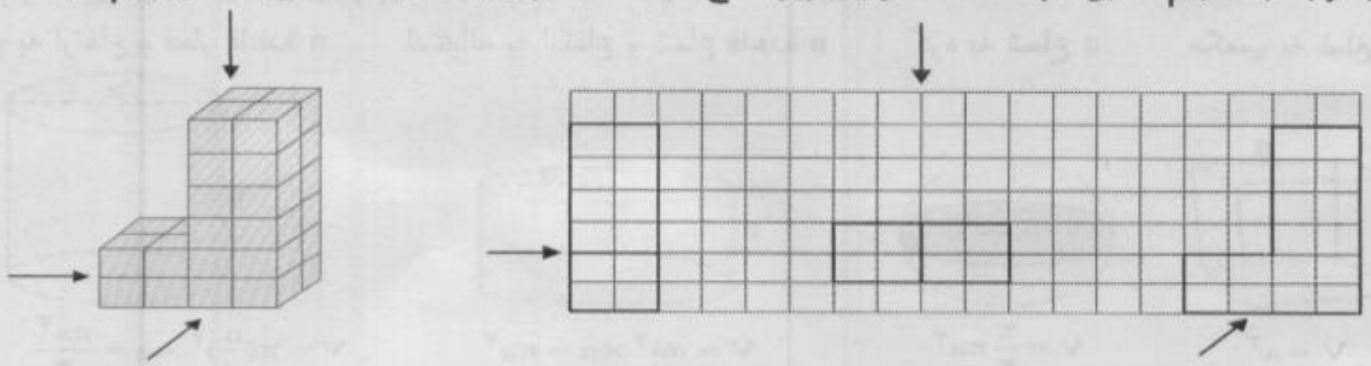
$\text{حجم حاصل از دوران}=\frac{(\frac{۴}{۳}\pi R^۳)}{۲}=\text{نیم‌کره}$

$=\frac{\frac{۴}{۳}\pi\times ۵^۳}{۲}=\frac{۲}{۳}\pi\times ۱۲۵=\frac{۲۵۰}{۳}\pi$

BIAMOZ.com

فعالیت ۱۴۲

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت‌های مشخص شده را رسم کنید.



۲- اگر هر کدام از هرم‌های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می‌شود؟

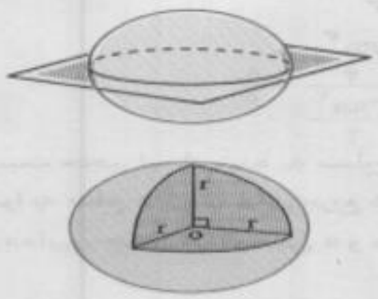
الف) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی ← شش ضلعی منتظم

ب) هرم منتظم با قاعده مربع ← مربع

ج) هرم منتظم با قاعده مثلث ← مثلث متساوی‌الاضلاع

۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟

سطح بریده شده دایره است. درصورتی که صفحه از مرکز کره عبور کند سطح بریده شده بزرگترین دایره ممکن است.



۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

$\frac{۱}{۸}$ از حجم کره برداشته شده است.

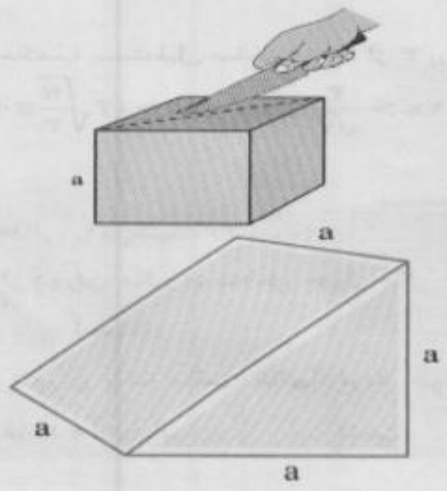
کار در کلاس ۱۴۳

۱- یک اسفنج مکعب شکل به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده‌ایم. سطح بریده شده به چه شکلی است؟ اندازه ضلع‌های آن را پیدا کنید.

سطح بریده شده به شکل یک مستطیل است. دو وجه جانبی مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند که طول ساق‌های آن همان ضلع مکعب است، یعنی a. ابعاد مستطیل دیده شده در سطح بریده شده به‌صورت زیر است:

عرض = a

طول = قطر مکعب. که قطر مکعب $\sqrt{۳}a$ است.

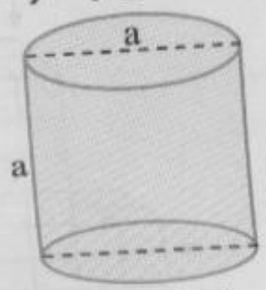


BIAMOZ.com

تمرین

۱- حجم و سطح کل شکل‌های زیر را پیدا و با هم مقایسه کنید.

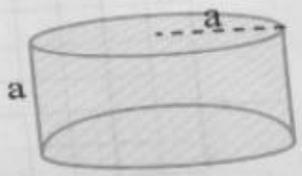
استوانه به ارتفاع و قطر قاعدهٔ a



$V=\pi(\frac{a}{۲})^۲\times a=\frac{\pi a^۳}{۴}$

$S=۲\pi(\frac{a}{۲})^۲+۲\pi(\frac{a}{۲})a=\frac{۳\pi a^۲}{۲}$

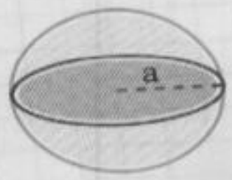
استوانه به ارتفاع و شعاع قاعدهٔ a



$V=\pi a^۲\times a=\pi a^۳$

$S=۲\pi a^۲+۲\pi a^۲=۴\pi a^۲$

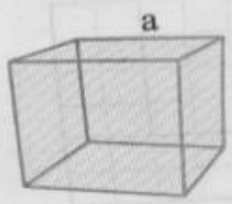
کره به شعاع a



$V=\frac{۴}{۳}\pi a^۳$

$S=۴\pi a^۲$

مکعب به ضلع a



$V=a^۳$

$S=۶a^۲$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح $(\frac{V}{S})$ را به‌دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ‌تر است؟

کره: $\frac{\frac{۴}{۳}\pi a^۳}{۴\pi a^۲}=\frac{a}{۳}$

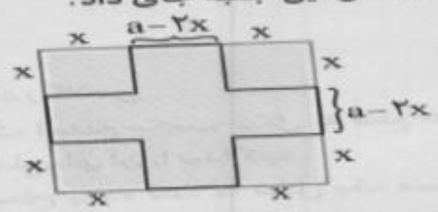
استوانه باریک: $\frac{\pi a^۳}{۲}=\frac{a}{۶}$

مکعب: $\frac{a^۳}{۶a^۲}=\frac{a}{۶}$

استوانه قطور: $\frac{\pi a^۳}{۴\pi a^۲}=\frac{a}{۴}$

در کره نسبت حجم ایجاد شده به سطح به کار رفته بیشترین مقدار را دارد.

۲- از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد.



حجم کره به شعاع $x=\frac{۴}{۳}\pi x^۳$

حجم مکعب مستطیل ساخته شده $=(a-۲x)^۲x$

باید حجم مکعب مستطیل ساخته شده از ۴ برابر حجم کره بیشتر باشد.

$(a-۲x)^۲x>۴\times\frac{۴}{۳}\pi x^۳ \Rightarrow (a-۲x)^۲>\frac{۱۶}{۳}\pi x^۲ \Rightarrow a-۲x>\frac{۴}{\sqrt{۳}}\sqrt{\pi}x \Rightarrow a>(۴\sqrt{\frac{\pi}{۳}}\pi+۲)x$

ارزشیابی مستمر

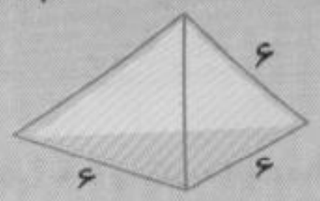
۱- جای خالی را پر کنید. (۲ نمره)

الف) از دوران یک مستطیل حول یکی از ضلع‌های آن یک ..... تولید می‌شود که شعاع قاعده آن برابر ..... است.

ب) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه آن یک ..... به‌دست می‌آید که شعاع قاعده آن برابر ..... است.

BIAMOZ.com

۲- مساحت کل یک هرم منتظم با قاعدهٔ مثلث (چهار وجهی منتظم) به ضلع قاعده ۶ را بیابید. (۲)



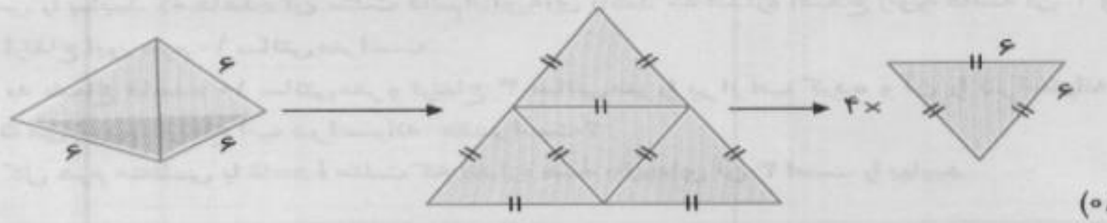
۳- حجم حاصل از دوران یک نیم‌دایره به شعاع ۶ را حول قطرش به دست آورید. (۲)

۴- اگر یک مکعب به ضلع ۴ را به طور قائم از روی قطر قاعده‌اش برش بزنیم سطح مقطع به دست آمده به چه شکلی است؟ مساحت آن را بیابید. (۲)

پاسخ ارزشیابی مستمر

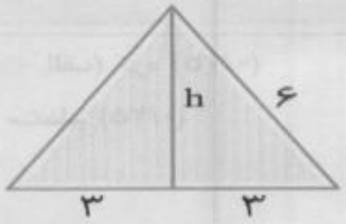
۱ الف) استوانه (۰/۵) – اندازه ضلع دیگر مستطیل (۰/۵) ب) مخروط (۰/۵) – اندازه ضلع دیگر زاویه قائمه (۰/۵)

۲



(۰/۵)

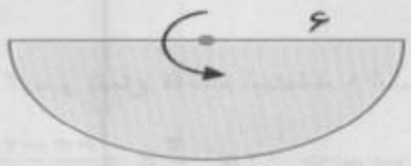
با توجه به شکل‌های رسم شده کافی است مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ را بیابیم.



$h^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ (۰/۵)

$S = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ (۰/۵) $\Rightarrow$ کل $S = 4 \times 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ (۰/۵)

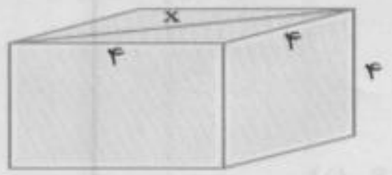
۳



$V = \frac{4}{3}\pi \times r^3$ (۰/۵)

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 216 = 288\pi$ (۱/۵)

۴ سطح مقطع به دست آمده یک مستطیل است که طول آن قطر قاعده و عرض آن ضلع مکعب است. (۰/۵)



اندازه قطر قاعده $\Rightarrow 4^2 + 4^2 = x^2$ (۰/۵)

$x^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (۰/۵)

مساحت $= 4\sqrt{2} \times 4 = 16\sqrt{2}$ (۰/۵)

BIAMOZ.com

آزمون تلفیقی

مبحث فصل ۸ — مدت: ... دقیقه — تاریخ: ../../..

۱- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. ۱

الف) مجموعه نقاطی از فضا که از نقطه ثابتی به نام مرکز به اندازه ثابتی فاصله دارند ..... نام دارد.

ب) حجم هر مخروط ..... حجم استوانه متناظر با آن است.

ج) هرمی که قاعده آن چند ضلعی منتظم و وجه‌های جانبی آن مثلث متساوی‌الساقین باشند هرم ..... می‌گویند.

د) از دوران یک مستطیل حول هر کدام از اضلاعش یک ..... ایجاد می‌شود.

۲- مساحت رویه یک کره برابر با 100π است. حجم این کره را حساب کنید. ۲

۳- کره‌ای را در استوانه‌ای به قطر و ارتفاع ۲ سانتی‌متر محاط کرده‌ایم. حجم فضای بین کره و استوانه را بیابید. ۲

۴- حجم هرمی را بیابید که قاعده آن مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشد که اندازه اضلاع زاویه قائمه آن ۳ و ۴ سانتی‌متر است و ارتفاع این هرم ۱۰ سانتی‌متر است. ۲

۵- مخروطی به شعاع قاعده ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۳ سانتی‌متر را پر از آب کرده و آن را در استوانه‌ای به شعاع قاعده ۵ می‌ریزیم. ارتفاع آب در استوانه چقدر است؟ ۲

۶- مساحت کل هرم منتظمی با قاعدهٔ مثلث که اندازه همهٔ یال‌های آن ۴ است را بیابید. ۱

پاسخ آزمون تلفیقی

۱ الف) کره (۰/۲۵) ب) $\frac{1}{3}$ (۰/۲۵)

ج) منتظم (۰/۲۵) د) استوانه (۰/۲۵)

۲

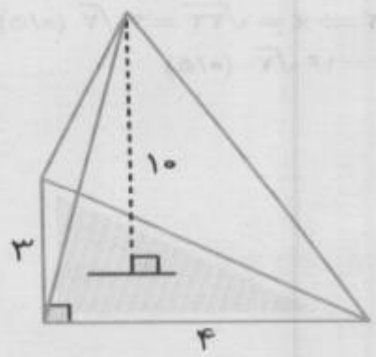
$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2 = 100\pi \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\text{حجم کره } u = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{125}{3}\pi \quad (0/5)$$

۳ شعاع کره و شعاع قاعده استوانه ۱ است. (۰/۵)

$$\left.\begin{array}{l}\text{حجم استوانه} = \pi r^2 h = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi \quad (0/5) \\ \text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi \quad (0/5)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{حجم بین کره و استوانه} = 2\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{6\pi - 4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad (0/5)$$

۴

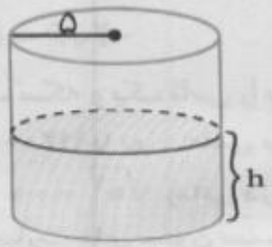


$$\text{مساحت قاعده} = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \quad (1)$$

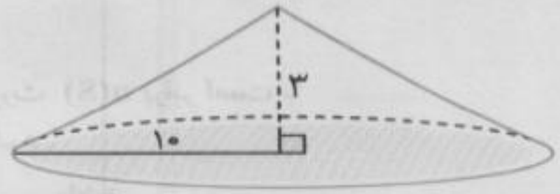
$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 6 \times 10 = 20 \quad (1)$$

BIAMOZ.com

۵



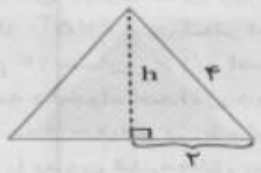
استوانه $V = \pi r^2 h = \pi \times ۵^2 \times h = ۲۵\pi h$ (۰/۷۵)



مخروط $V = \frac{۱}{۳}\pi r^2 h = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۱۰^2 \times ۳ = ۱۰۰\pi$ (۰/۷۵)

$\Rightarrow ۲۵\pi h = ۱۰۰\pi \Rightarrow h = ۴$ (۰/۵)

۶ هر وجه این هرم یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ است. پس کافی است مساحت یک وجه را پیدا کرده و در ۴ ضرب کنیم. (۰/۲۵)





$\Rightarrow h^2 + ۲^2 = ۴^2 \Rightarrow h^2 = ۱۶ - ۴ = ۱۲ \Rightarrow h = \sqrt{۱۲}$ (۰/۲۵)

مساحت مثلث $= \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۱۲}$ (۰/۲۵)

مساحت کل $= ۴ \times ۲\sqrt{۱۲} = ۸\sqrt{۱۲}$ (۰/۲۵)

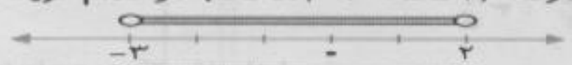
آزمون دهی ماه (نوبت اول) — سؤال تستی امتحانی — مدت: ... دقیقه — تاریخ: ...

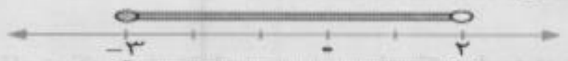
۱- در سؤال‌های زیر گزینه صحیح را مشخص کنید. ۲

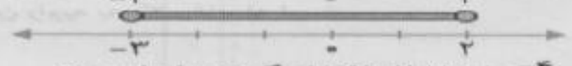
الف) در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره به‌طور تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد این مهره سبز نباشد؟

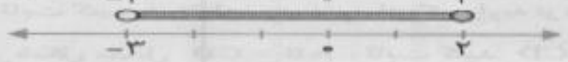
۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۳}{۱۲}$ ۴) $\frac{۴}{۱۲}$

ب) مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid -۳ < x \leq ۲\}$ در کدام گزینه درست نشان داده شده است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

ج) عدد $۲/۱ \times ۱۰^{-۴}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) ۰/۰۰۰۲۱ ۲) ۰/۰۰۰۰۲۱ ۳) ۲۱۰۰۰ ۴) ۰/۰۲۱

د) حاصل $\frac{\sqrt{۱۰} \times \sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۵}$

BIAMOZ.com

۲- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. ۱

الف) $\sqrt{۶}۵ = \sqrt{۶}۲-$ .....

ب) اگر یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب کنیم در این صورت $n(S)$ برابر است با .....

ج) عدد ۱۱۲۰۰۰۰ با نماد علمی به‌صورت ..... نوشته می‌شود.

د) تساوی $\sqrt{a^۲} = -a$ زمانی درست است که a عددی ..... باشد.

۳- هر یک از عبارت‌های ستون سمت چپ را به یک عبارت از ستون سمت راست وصل کنید. ۱

$Q' \cap \mathbb{R}$	$\varnothing$
$Q \cup Q'$	Q'
$\mathbb{Z} - Q$	$\mathbb{R}$
$W \cap \mathbb{N}$	$\mathbb{N}$

۴- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۱

الف) $۰/۵^۳$ از $۰/۲۵^۴$ بزرگ‌تر است.

ب) ریشه دوم ۱۶ همان $\sqrt{۱۶}$ است.

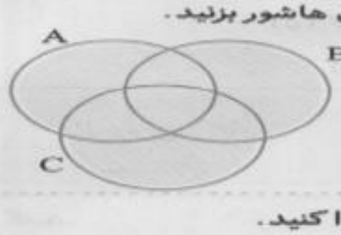
ج) هر مجموعه دلخواه حداقل دو زیر مجموعه دارد.

د) بین هر دو عدد حقیقی بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

۵- عبارت مقابل را بدون قدرمطلق بنویسید. ۱

$|۱ - \sqrt{۲}| + |\sqrt{۳} - \sqrt{۲}| =$

۶- مجموعه $A - (B \cup C)$ را در نمودار ون هاشور بزنید. ۰/۵



۷- بین دو عدد $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۲}{۳}$ سه عدد گویا پیدا کنید. ۱

۸- اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B = \{۱,۷,۶,۳\}$ و $C = \{۲,۳,۶\}$ مجموعه زیر را با عضوهایش مشخص کنید. ۱/۵

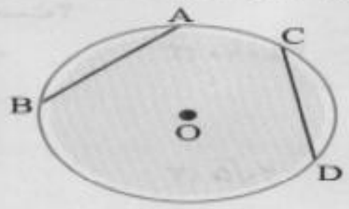
$(A - B) \cap (B \cup C)$

۹- حاصل عبارت مقابل را بیابید. ۱/۵

$$\frac{\frac{۲}{۵} - \frac{۵}{۶}}{\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۱۰}} + ۳\frac{۱}{۴}$$

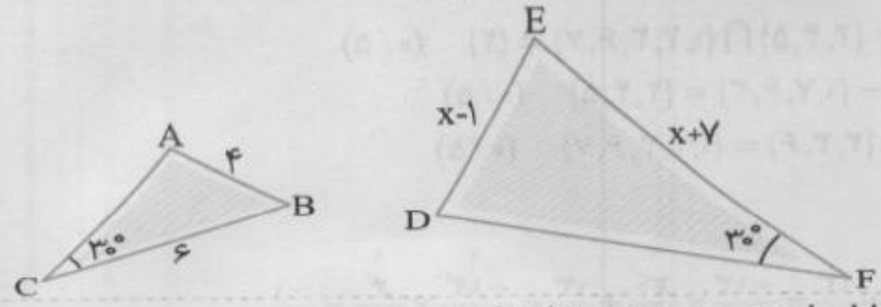
۱۰- ثابت کنید هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. ۱/۵

۱۱- در شکل مقابل $AB = CD$ ، ثابت کنید $\overline{AB} = \overline{CD}$ ۱/۵



BIAMOZ.com

۱۲- مثلث ABC با مثلث DEF متشابه است. x را بیابید.



۱

۱۳- حاصل عبارت مقابل را به‌صورت عددی توان‌دار بنویسید.

۱/۵

$$\frac{(\frac{۲}{۳})^{۳}\times(-\frac{۸}{۳})^{-۳}}{(-۲)^{۵}\times ۲^{-۸}}$$

۱۴- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۲

الف) $۴\sqrt{۵۴}-\sqrt{۲۴}+۳\sqrt{۶}$

ب) $\sqrt{x^{۲}}+\sqrt{y^{۲}}$ $(x>۰, y<۰)$

۱۵- مخرج هر یک از کسرهای زیر را گویا کنید.

۲

الف) $\frac{۳}{۲\sqrt{۶}}$

ب) $\frac{۴}{۳\sqrt{۲}}$

پاسخ سوالات امتحانی

۱ الف) گزینه ۲ ب) گزینه ۴ ج) گزینه ۱ د) گزینه ۲ (هر مورد ۰/۵)

۲ الف) $۷\sqrt{۶}$ ب) ۱۲ ج) $۱/۱۲\times۱۰^{۶}$ د) نامثبت (هر مورد ۰/۲۵)

۳ (هر مورد ۰/۲۵)

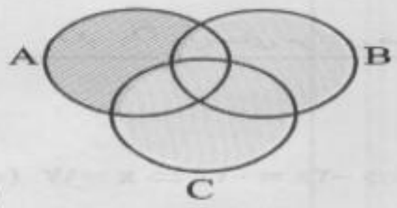


۴ الف) درست ب) نادرست ج) نادرست د) درست (هر مورد ۰/۲۵)

۵

$$|۱-\sqrt{۲}|+|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}| = \underset{(۰/۲۵)}{\sqrt{۲}-۱}+\underset{(۰/۲۵)}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}} = \underset{(۰/۵)}{\sqrt{۳}-۱}$$

۶



(۰/۵)

۷

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۳۲}{۴۸} \quad (۰/۲۵)\\ \frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۱۲}=\frac{۳۶}{۴۸} \quad (۰/۲۵)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۲}{۳}<\frac{۳۳}{۴۸},\frac{۳۴}{۴۸},\frac{۳۵}{۴۸}<\frac{۳}{۴} \quad (۰/۵)$$

BIAMOZ.com

۸

$(A-B)\cap(B\cup C)=\{۲,۴,۵\}\cap\{۱,۲,۳,۶,۷\}=\{۲\}$ (۰/۵)

$A-B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۱,۷,۶,۳\}=\{۲,۴,۵\}$ (۰/۵)

$B\cup C=\{۱,۷,۶,۳\}\cup\{۲,۳,۶\}=\{۱,۲,۳,۶,۷\}$ (۰/۵)

۹

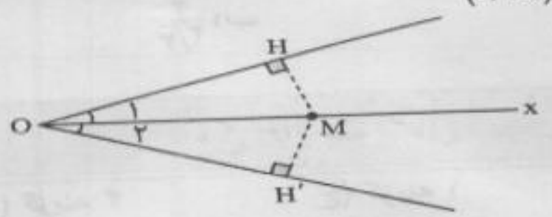
$$\frac{\frac{۲}{۵}-\frac{۵}{۶}}{\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۱۰}}+۳\frac{۱}{۴}=\frac{\frac{-۱۳}{۳۰}}{\frac{۱۶}{۳۰}}+\frac{۱۳}{۴}=\frac{-۱۳}{۳۰}\times\frac{۳۰}{۱۶}+\frac{۱۳}{۴}=\frac{-۱۳}{۱۶}\times\frac{۱۶}{۱۳}=\frac{-۱}{۴}$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\frac{۲}{۵}-\frac{۵}{۶}=\frac{۱۲-۲۵}{۳۰}=\frac{-۱۳}{۳۰}$ (۰/۵)

$\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱۰+۶}{۳۰}=\frac{۱۶}{۳۰}$ (۰/۵)

۱۰ زاویه O را رسم کرده و نیم‌ساز ox را برای آن می‌کشیم. نقطه دلخواه M را روی Ox در نظر گرفته و از آن دو عمود بر دو ضلع زاویه رسم می‌کنیم. (۰/۲۵)



$OM=OM$ (۰/۲۵) (وتر مشترک)

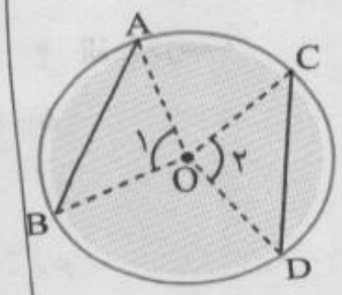
$\hat{O}_۱=\hat{O}_۲$ (۰/۲۵) (ox نیم‌ساز $\hat{O}$ است)

} (وتر و یک زاویه تند) (۰/۲۵)

$\overset{\Delta}{OHM}\equiv\overset{\Delta}{OH'M}\Rightarrow HM=H'M$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۱ از O (مرکز دایره) به نقاط A و B و C و D وصل می‌کنیم.



(شعاع) $OA=OC$ (۰/۲۵)

(شعاع) $OB=OD$ (۰/۲۵)

(فرض) $AB=CD$ (۰/۲۵)

} (ض‌ض‌ض)

$\overset{\Delta}{OAB}\equiv\overset{\Delta}{OCD}\Rightarrow\hat{O}_۱=\hat{O}_۲$ ($\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ زاویه‌های مرکزی هستند) $\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۲

$\frac{۴}{x-۱}=\frac{۶}{x+۷}\Rightarrow ۴x+۲۸=۶x-۶\Rightarrow -۲x=-۳۴\Rightarrow x=۱۷$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵)

۱۳

$$\frac{(\frac{۲}{۳})^۳\times(-\frac{۸}{۳})^{-۳}}{(-۲)^۵\times۲^{-۸}}=\frac{(\frac{۲}{۳})^۳\times(-\frac{۳}{۸})^۳}{-۳^۵\times۲^{-۸}}=\frac{(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴})^۳}{-۲^{-۳}}=\frac{-(\frac{۱}{۴})^۳}{-۲^{-۳}}=(\frac{۱}{۴})^۳\times۲^۳=(\frac{۱}{۲})^۳$$

(۰/۵) (۰/۵) (۰/۵)

BIAMOZ.com

۱۴

الف) $۴\sqrt{۵۴}-\sqrt{۲۴}+۳\sqrt{۶}=۴\sqrt{۹\times۶}-\sqrt{۴\times۶}+۳\sqrt{۶}=۱۲\sqrt{۶}-۲\sqrt{۶}+۳\sqrt{۶}=۱۳\sqrt{۶}$ (۰/۵) (۰/۵)

ب) $\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=|x|+|y|=x-y$ (۰/۵) (۰/۵)

۱۵

الف) $\frac{۳}{۲\sqrt{۶}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۶}}\times\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۶}}=\frac{۳\sqrt{۶}}{۲\times۶}=\frac{\sqrt{۶}}{۴}$ (۰/۵) (۰/۵)

ب) $\frac{۴}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۴}{\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۲\cancel{۴}\sqrt[۳]{۴}}{\cancel{۴}}=۲\sqrt[۳]{۴}$ (۰/۵) (۰/۵)

سؤال های امتحانی

آزمون خرداد ماه (نوبت دوم) مدت ... دقیقه تاریخ .....

۲

۱- در سؤال‌های زیر گزینه صحیح را مشخص کنید.

الف) حاصل عبارت $۰/۳۲+۰/۲۳$ در کدام گزینه دیده می‌شود؟

۱) ۰/۵ ۲) $۰/\overline{۴۶}$ ۳) $۰/\overline{۵}$ ۴) $۰/۶۴$

ب) ساده شده عبارت $|a|+|-a+۱|$ در صورتی که $a\geq ۲$ باشد کدام است؟

۱) ۱ ۲) $۲a+۱$ ۳) $۲a-۱$ ۴) $-۲a+۱$

ج) شیب و عرض از مبدأ خط به معادلهٔ $۳x-۲y=۱$ به ترتیب کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{-۳}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{-۳}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$

د) کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$

۳) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}'$ ۴) $\mathbb{Q}\cup\mathbb{W}=\mathbb{Q}$

۱

۲- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) ..... دو عدد $\frac{۴}{۳}$ و $\frac{-۴}{۳}$ برابر با $\frac{۴}{۳}$ است.

ب) $(۳x+.....)(۳x-\frac{۱}{۲})=(۹x^۲-\frac{۱}{۴})$

ج) نقطه‌ای به طول ۳ روی خط $y=۲x-۱$ قرار دارد. در این صورت عرض این نقطه ..... است.

د) عبارت $\frac{۳}{۲x-۴}$ به ازای عدد ..... تعریف نشده است.

۱

۳- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $-\sqrt{۷aby^۲}$ یک، یک جمله‌ای است.

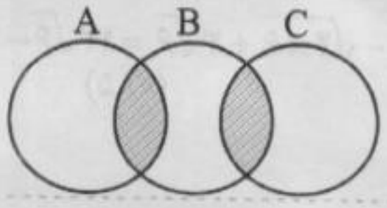
ب) اگر خطی افقی باشد، شیب آن تعریف نشده است.

ج) اگر x و y دو عدد باشند که $x<y$، آن‌گاه برای هر عدد منفی a داریم $\frac{x}{a}<\frac{y}{a}$.

د) اعداد گنگ وقتی به‌صورت اعشاری نوشته می‌شوند، رقم های اعشاری آن‌ها متناوب است.

BIAMOZ.com

۰/۵ **۴-** در شکل مقابل قسمت هاشورخورده را با نمادهای ریاضی $\cup$ و $\cap$ و - بیان کنید.



۱ **۵-** حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $Q' \cap Q = ...$ ب) $\mathbb{R} - Q' = ...$

ج) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = ...$ د) $W - \mathbb{N} = ...$

۰/۷۵ **۶-** حاصل عبارت زیر را بیابید.

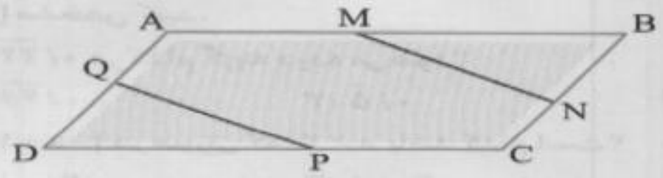
$$۳\sqrt{۱۲} - ۲\sqrt{۸} - ۴\sqrt{۱۸} - ۲\sqrt{۲۷} =$$

۰/۷۵ **۷-** الف) حاصل عبارت مقابل را به‌صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$\frac{۳^{-۵} \times ۴^{۲} \times (-۴)^{-۵}}{۲^{۴}}$$

۰/۵ ب) عدد A را با نماد علمی بنویسید. $A = ۳۱۰۰۰۰۰$

۱ **۸-** در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع هستند. ثابت کنید $MN = PQ$.



۱ **۹-** حاصل عبارت‌های زیر را با کمک اتحادها بنویسید.

الف) $(۲x + ۳)^{۲}$ ب) $(۳x - ۴)(۳x + ۴)$

۱ **۱۰-** تجزیه کنید.

الف) $۳x^{۲} - ۹x + ۶$ ب) $۴۹x^{۲} - ۲۵$

۱ **۱۱-** نامعادله زیر را حل کنید و مجموعه جواب را روی محور مشخص کنید.

$$\frac{-۲}{۳}x - ۴ < \frac{-۲}{۵}(x - ۴)$$

۱ **۱۲-** معادله خطی بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بگذرد و با خط $۳x - y = ۲$ موازی باشد.

۰/۷۵ **۱۳-** خط به معادلهٔ $۲x - y = ۳$ را رسم کنید.

۱ **۱۴-** دستگاه $\begin{cases} ۵x - ۲y = ۴ \\ ۳x - y = ۳ \end{cases}$ را به روش جایگزینی حل کنید.

۰/۷۵ **۱۵-** ثلث عدد ۸۱×۲۷۰^{۵۰} را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

۲ **۱۶-** حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\frac{۳}{x-۱} - \frac{۳x}{x^{۲}-۱} =$ ب) $\frac{x^{۲} - ۲x}{۳x(x+۱)} + \frac{x^{۲} - ۴x + ۴}{x^{۲} + ۳x + ۲}$