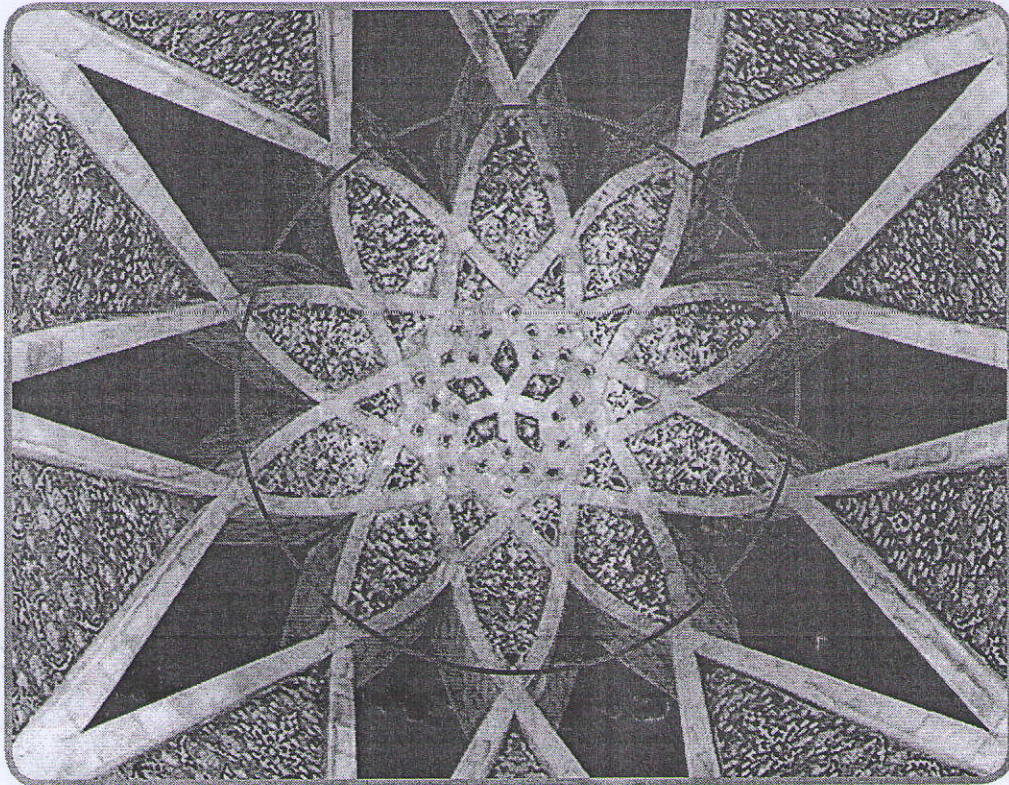


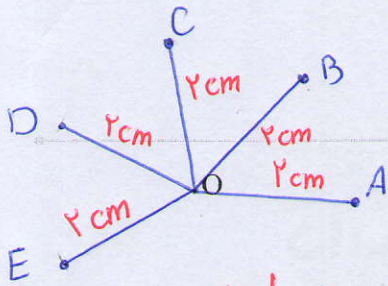
فصل ۹

دایره‌ها



زاویه‌های محاطی و مرکزی و ارتباط آنها با کمان‌ها در دایره کاربرد بسیاری در طراحی نقش فرش‌ها و دیگر صنایع دستی و معماری دارد.

در تصویر بالا نمای داخلی سقف آرامگاه حکیم خیام نیشابوری را مشاهده می‌کنید. خیام، فیلسوف، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و رباعی‌سرای ایرانی قرن پنجم هجری شمسی است. یکی از برجسته‌ترین کارهای وی اصلاح گاهشماری ایران در زمان وزارت خواجه نظام الملک در دوره سلجوقی است.



خط و دایره

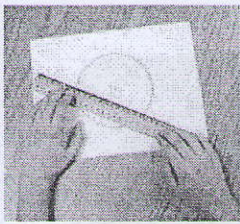
فعالیت



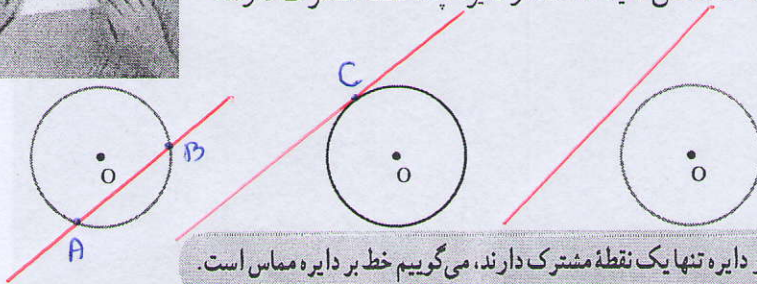
۱- پنج نقطه پیدا کنید که فاصله هر کدام از نقطه O، ۲ سانتی متر باشد.

تعریف دایره موازی

اگر این نقطه‌ها را بیشتر و بیشتر کنیم، چه شکلی ایجاد می‌شود؟ **دایره**
 ۲- دو خط یا موازی‌اند یا متقاطع؛ یعنی، یا نقطه مشترکی ندارند یا در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.



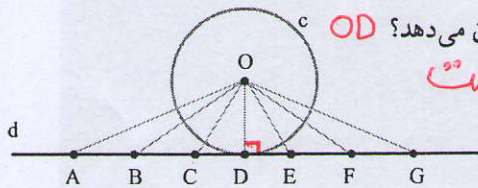
حالا سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید و در هر حالت، مشخص کنید که خط و دایره چند نقطه مشترک دارند.



تعریف مماس

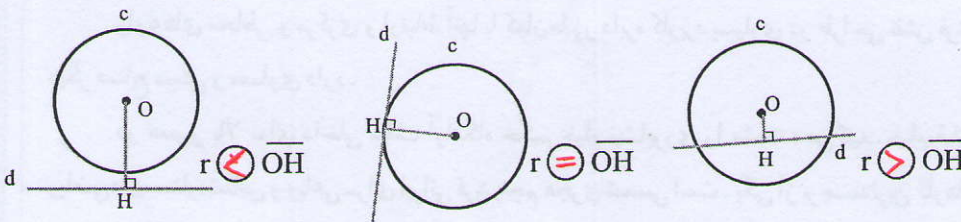
در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

۳- فاصله یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره خطی است که آن نقطه را به خط وصل می‌کند. خط d بر دایره c به مرکز O و شعاع r مماس است.

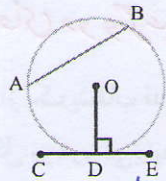
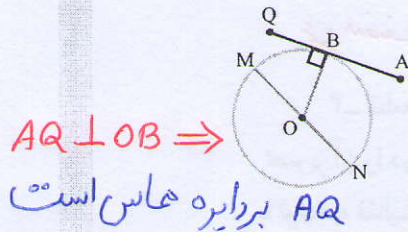


کدام پاره خط فاصله مرکز دایره از خط d را نشان می‌دهد؟ OD **برابریست** اندازه این پاره خط را r مقایسه کنید.

۴- در هر یک از شکل‌های زیر دایره‌ای به شعاع r رسم کرده‌ایم. فاصله مرکز دایره از خط d را \overline{OH} بنامید و بدون اندازه‌گیری، رابطه‌های زیر را با علامت $>$ ، $=$ یا $<$ کامل کنید.



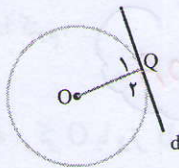
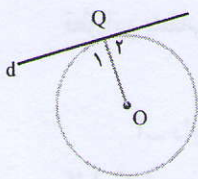
شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.



کار در کلاس



۱- در هر شکل، کدام پاره خط $OD \perp EC \Rightarrow$ بر دایره مماس است؟

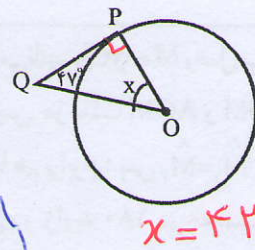
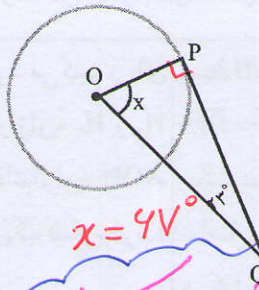
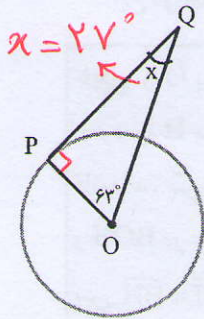


۲- در هر شکل، خط بر دایره مماس است.

زاویه Q_1 چه نوع زاویه‌ای است؟ قائمه

$\hat{Q}_1 = 90$

۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.

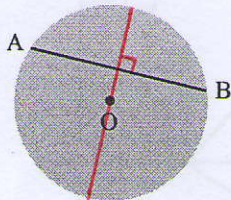


پیدا کردن مرکز دایره

فعالیت



۱- مانند شکل، روی یک ورق کاغذ دایره‌ای رسم کنید. سپس، صفحه

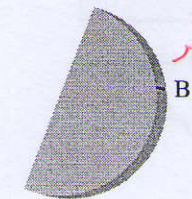


دایره‌ای شکل را با قیچی جدا کنید. دو نقطه A و B را روی دایره قرار دهید.

A را به B وصل کنید. این پاره خط وتر دایره نامیده می‌شود.

دایره را طوری تا کنید که نقاط A و B روی هم قرار بگیرند.

تای کاغذ را باز کنید.



روی خط تا را با مداد پررنگ کنید. در هندسه به این پاره خط چه می‌گویند؟ قطر

روی دایره، وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را برای آن تکرار کنید.

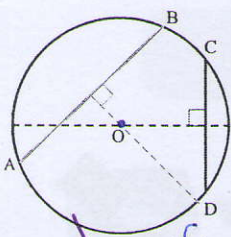
دو پاره خط رسم شده یکدیگر را در چه نقطه‌ای قطع می‌کنند؟ مرکز

نکته: قطری که AB را نصف می‌کند بر آن عمود است

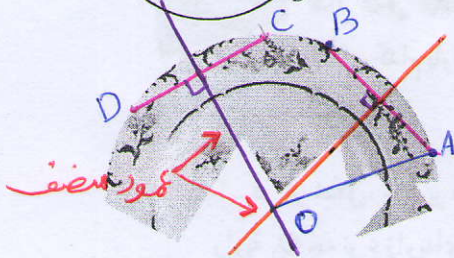
نکته: اگر عمود نصف دو وتر دلخواه غیر موازی را رسم کنیم یکدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند

وتر: پاره خطی که دو نقطه‌ای متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند را وتر می‌نامیم

۳۶



۲- نتیجه فعالیت (۱) را به کمک شکل روبه‌رو توضیح دهید.
 برای پیدا کردن مرکز یک دایره، کافی است نقطه‌ی برخورد
عمود منصف‌های دو وتر غیر موازی آن را پیدا کنیم



۳- قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است.
 تصویر آن را در شکل روبه‌رو می‌بینید.
 با توجه به فعالیت‌های قبل، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم
 قطر این بشقاب را پیدا کنیم.

$2OA = \text{قطر}$

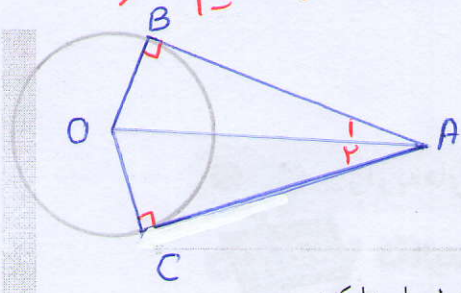
۴- دایره‌ای به مرکز O با وتر AB داریم. دو متن زیر را بخوانید و نتیجه هر یک از آنها را کامل کنید.

این دو چه تفاوتی دارند؟ درباره آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

<p>خطی از O بر AB عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. دو زاویه H_1 و H_2 قائمه‌اند. پس دو مثلث قائم‌الزاویه AOH و BOH در حالت وتر و یک ضلع برابرند؛ پس $\overline{AH} = \overline{BH}$</p>	<p>وسط AB را M می‌نامیم و O را به M وصل می‌کنیم. پس دو مثلث AOM و BOM در حالت سه ضلع با هم برابرند؛ پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و چون حاصل جمع این دو زاویه 180° درجه است، پس هر کدام از آنها 90° درجه است.</p>
--	---

نتیجه: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند
 و برعکس پاره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند، بر آن عمود است

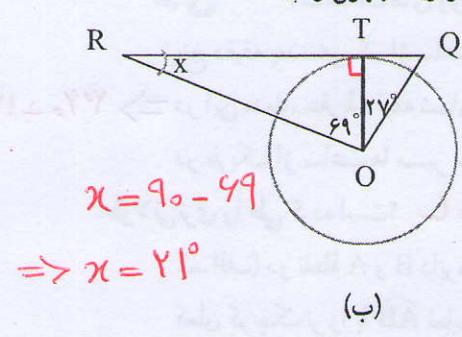
تکته: اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس باهم برابر است و خطی که مرکز را به آن نقطه وصل می‌کنیم نیم‌ساز زاویه بین این دو خط مماس است



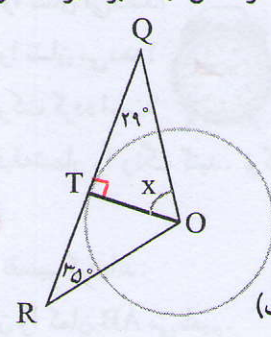
$AB = AC$
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

کار در کلاس

۱- در هر شکل، RQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



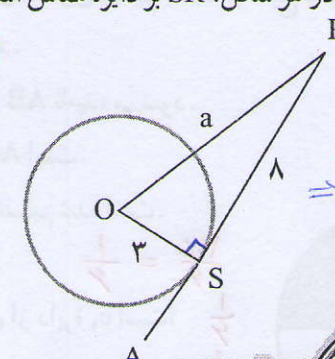
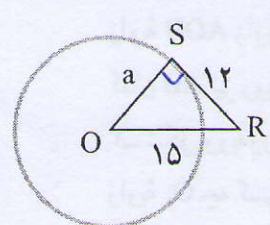
$x = 90 - 69$
 $\Rightarrow x = 21^\circ$



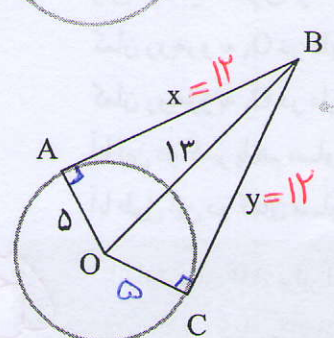
$x = 90 - 29$
 $x = 61$

۲- در هر شکل، SR بر دایره مماس است. طول پاره خط a را به دست آورید.

$a^2 = 15^2 - 12^2 \Rightarrow a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$



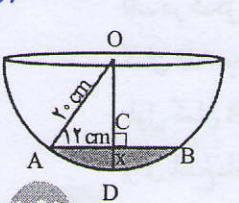
$a^2 = 3^2 + 8^2 = 9 + 64$
 $\Rightarrow a = \sqrt{73}$



۱- نقطه B در فاصله ۱۳ سانتی متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد. از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم. فاصله B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.

$x^2 = 13^2 - 5^2 = 144$
 $\Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$

۲- از نقطه O' خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B بنامید. شکل بکشید و دلیل هر یک از موارد زیر را بنویسید.



الف) چرا $O'A = O'B$ ؟
 ب) چرا OO' نیم‌ساز $\angle AOB$ است؟
 ۳- در کاسه روبه‌رو مقداری آب ریخته‌ایم، \overline{AB} برابر ۲۴ سانتی متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟

(و تر و کد ضلع را بر قائم)

$OC^2 = 20^2 - 12^2 \Rightarrow OC^2 = 400 - 144 \Rightarrow OC^2 = 256 \Rightarrow OC = 16$

$x = 20 - 16 = 4 \text{ cm}$ عمق آب

زاویه‌های مرکزی

فعالیت



10:15

10:10



۳۰ درجه

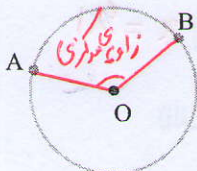
۱- ساعت‌های روبه‌رو چه زمانی را نشان می‌دهند؟

پنج دقیقه بعد، هریک از ساعت‌ها چه زمانی را نشان می‌دهد؟

در این مدت، عقربه دقیقه‌شمار چند درجه حرکت کرده است؟ $\Rightarrow 360 \div 12 = 30$

در هریک از ساعت‌ها مسیر حرکت عقربه دقیقه‌شمار را رنگ کنید. نوک کدام عقربه مسیر

طولانی‌تری را طی کرده است؟ **ساعت دیواری**



۲- الف) دو نقطه A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده‌اند.

کمان کوچک‌تر را با \widehat{AB} نمایش می‌دهیم و آن را کمان AB می‌نامیم.

آیا ممکن است دو نقطه، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ توضیح دهید.

ب) مرکز دایره را به دو سر کمان وصل کنید.

زاویه AOB زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان AB نامیده می‌شود.

کمان AB نیز روبه‌رو به زاویه مرکزی AOB است.

۳- شکل روبه‌رو به شش قسمت مساوی تقسیم شده است.

زاویه O_1 چه کسری از 360° درجه است؟

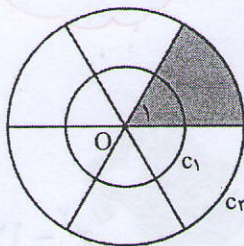
$$\frac{360}{6} = \frac{1}{6}$$

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره C_1 چه کسری از دایره C_1 است؟

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره C_2 چه کسری از دایره C_2 است؟

آیا این دو کسر با هم مساوی‌اند؟ **بله**

آیا طول این دو کمان مساوی است؟ **خیر** اولی $\frac{1}{6}$ از دایره C_1 و دومی $\frac{1}{6}$ از دایره C_2 است

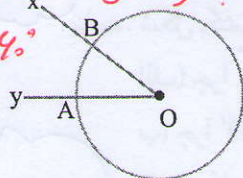


اندازه کمان \widehat{AB} برابر است با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به آن. بنابراین، ممکن است دو

کمان با اندازه‌های مساوی، طول‌های متفاوتی داشته باشند.

۴- چرا در فعالیت (۳) اندازه کمان روبه‌رو به O_1 در هریک **هر دایره با هر شعاعی 360° است و این روی**

از دایره‌های C_1 و C_2 برابر 60° درجه است؟ **$\frac{1}{6}$ دایره است پس هر کدام**



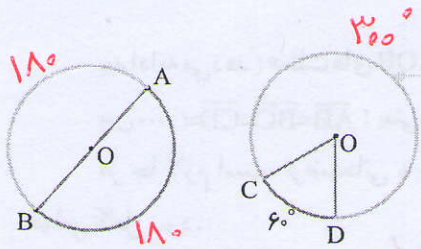
۵- در شکل رو به رو زاویه xOy برابر 36° درجه است.

کمان AB چند درجه است؟ **36°**

طول کمان AB چه کسری از دایره است؟ **$\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$**

$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{360^\circ}$$

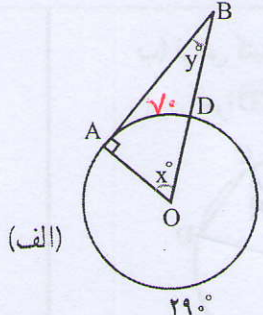
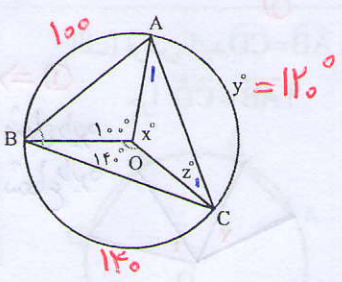
کار در کلاس



۱- هر دایره به دو کمان تقسیم شده است. اندازه هر کمان را پیدا کنید و بنویسید.

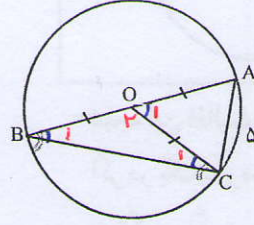
۲- اندازه کمان و زاویه‌های مجهول را پیدا کنید.

$y = 360 - (100 + 140)$
 $\Rightarrow y = 120^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$
 $OA = OC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 = 30^\circ$
 $\hat{A}_1 + \hat{C}_1 = 180 - 120 = 60^\circ \uparrow$ (ب)



$x = \widehat{AD} \Rightarrow$
 $x = 70^\circ \Rightarrow y = 90 - 70$
 $\Rightarrow y = 20^\circ$

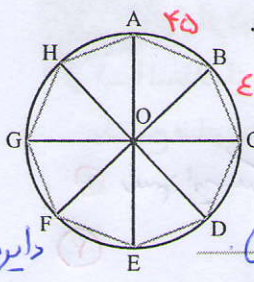
۳- در شکل روبه‌رو، AB قطر دایره است. زاویه B چند درجه است؟



$\hat{O}_1 = \widehat{AC} = 50^\circ$
 $\Rightarrow \hat{O}_2 = 180 - 50 = 130^\circ$
 $OB = OC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 25^\circ$
 $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180 - 130 = 50^\circ \uparrow$



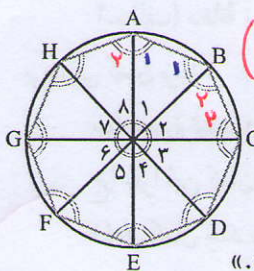
$360 \div 8 = 45$



۱- محیط دایره روبه‌رو را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم بدانیم چرا هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است. رضا برای اثبات این مطلب دلایل زیر را بیان می‌کند: (مثلث‌های AOB, BOC, COD و ... متساوی‌الساقین اند.

دایره من باشند

چرا؟ زیرا داریم $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \dots$ و پس همه زاویه‌های سبز رنگ با هم برابرند.



چرا؟ پس همه زاویه‌های هشت ضلعی با هم برابرند. چرا؟

آرش می‌گوید: «ولی این تنها برابری زاویه‌ها را نشان می‌دهد و ما باید دلایلی هم برای مساوی بودن ضلع‌های هشت ضلعی پیدا کنیم تا بتوانیم بگوییم که هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.»

$(\hat{O}_2 = 45, OB = OC) \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_2 = 47.5^\circ$

پس تمام زاویه‌های سبز رنگ با هم مساوی می‌باشند

$A = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A} = 2 \times 47.5 = 95$

به همین ترتیب داریم $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \dots = \hat{H} = 95$



بعد ادامه می دهد: «مثلث های AOB, BOC, COD... هم نهشت اند. در چه حالتی؟ (هنر و ذهن)»

پس... $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots$ ؛ یعنی ضلع های هشت ضلعی هم مساوی اند.»

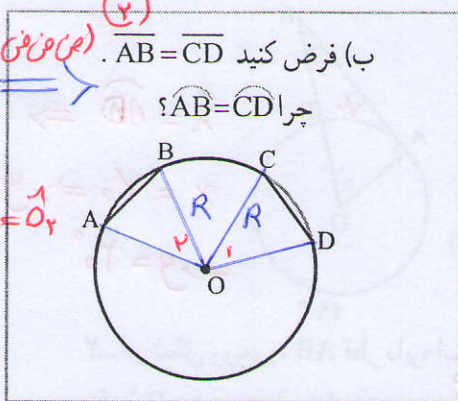
هر جا لازم است، توضیحاتی به دلایل رضا و آرش اضافه کنید تا دلیل منتظم بودن هشت

ضلعی کامل شود.

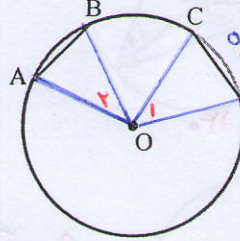
۲- برای هر مورد دلیل بیاورید. **کلامی**

② $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$
 $OA = OD = R$
 $OB = OC = R$

$\triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$
 $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$



الف) فرض کنید $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ چرا $\overline{AB} = \overline{CD}$ ؟

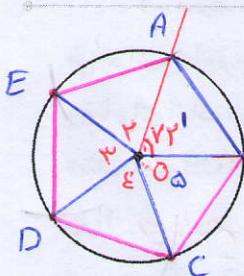


① $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$
 $OA = OD$
 $OC = OB$
 $\Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle COD$
 $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$

نتیجه این فعالیت را در دو جمله بنویسید.

اگر در یک دایره، اندازه دو کمان برابر باشد، اندازه وترهای نظیر آن ها نیز با هم برابر خواهد بود
 به عکس، اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد، اندازه کمان های نظیر آن ها نیز با هم برابر است

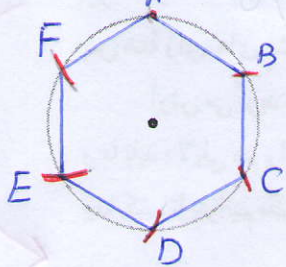
کار در کلاس



۱- با استفاده از خط کش و نقاله، در دایره روبرو یک پنج ضلعی منتظم رسم کنید. اندازه هر کمان 72° است. $360 \div 5 = 72$
 رسم زاویه مرکزی 72° درجه
 $\hat{AOB} = 72^\circ$
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \dots = \hat{O}_5 = 72^\circ$

۲- الف) دهانه پرگار را به اندازه شعاع دایره زیر باز کنید. از یک نقطه دایره، شروع کنید و

بی دربی کمان بزنید.



ب) بدین ترتیب، دایره به چند کمان تقسیم می شود؟
 ج) چرا این کمان ها با هم مساوی اند؟ زیرا $AB = BC = \dots = AF$
 د) هر کمان چند درجه است؟ $360 \div 6 = 60^\circ$
 ه) چند کمان 120° درجه در شکل دیده می شود؟

$\widehat{AC} = \widehat{BD} = \widehat{CE} = \widehat{DF} = \widehat{EA} = \widehat{FB} = 120^\circ$

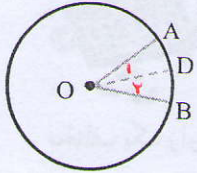
زیرا اگر در یک دایره اندازه وترها مساوی باشد آن گاه کمان های نظیر آن ها نیز با هم مساوی هستند

جواب سؤال ۴ الف) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AC} = \widehat{AD} = \widehat{BC}$ ①

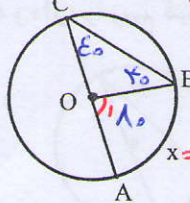
اگر دو زاویه مرکزی برابر باشند کمان‌های نظیرشان نیز با هم برابر است
 ب) بله، می‌دانیم اگر چند کمان با هم مساوی باشند آن‌ها وترهای نظیر آن کمان‌ها نیز با هم مساوی اند

① $\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AC} = \widehat{AD} = \widehat{BC}$

($\hat{O}_1 = 90^\circ, OB = OC$) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$
 ($\hat{O}_2 = 90^\circ, OA = OC$) $\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$



۱- OD نیمساز زاویه مرکزی AOB است و $\angle AOB = 36^\circ$. اندازه هر یک از کمان‌های AD و BD چند درجه است؟ 18°
 ۲- کمان AB برابر x درجه است. $36 \div 2 = 18 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 18^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB} = 18^\circ$



زاویه خارجی $\hat{O}_1 = \hat{B} + \hat{C}$

$OB = OC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

$\hat{C} = \frac{x}{2} \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$

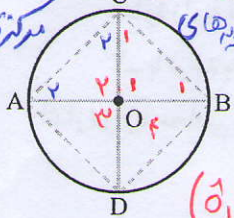
۳- متحرکی از نقطه A روی دایره‌ای به شعاع یک سانتی متر شروع به حرکت می‌کند. در هر

شکل، کمان طی شده مشخص شده است. جدول را کامل کنید.

شکل	کسر طی شده از دایره	اندازه کمان طی شده	طول تقریبی کمان طی شده
	$\frac{1}{4}$	90°	$\frac{2\pi}{4}$
	$\frac{1}{3}$	120°	$\frac{2\pi}{3}$
	$\frac{1}{2}$	180°	$\frac{2\pi}{2} = \pi$
	$\frac{3}{4}$	270°	$\frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$
	۱	360°	2π

۴- قطرهای AB و CD بر هم عمودند. $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BD} = \widehat{AD} = \widehat{AC}$

مرکزی با هم برابرند

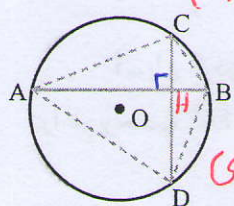


الف) چرا کمان‌های AC، CB، BD، DA با هم مساوی اند؟ چون زاویه‌های مرکزی با هم برابرند

ب) آیا وترهای AC، CB، BD، DA نیز با هم مساوی اند؟ بله

ج) آیا زاویه‌های چهارضلعی ADCB با هم مساوی اند؟ چرا؟ بله

د- در شکل روبه‌رو وترهای AB و CD بر هم عمودند. $(\hat{O}_1 = 90^\circ, OC = OB) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{A}_2 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ$



الف) آیا کمان‌های AC، CB، BD، DA با هم مساوی اند؟ خیر

ب) پاسختان را با پاسخ تمرین قبل مقایسه کنید.

این دو تمرین چه تفاوتی دارند؟ در تمرین قبل دو وتر قطرهای دایره بودند و در تمرین بعدی راقطع مرکز بودند ولی اینها وترها قطر نیستند

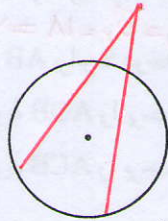
زاویه‌ی H یک زاویه مرکزی نیست

زاویه‌های محاطی

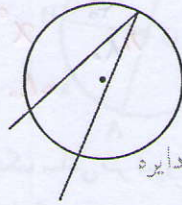
فعالیت



۱- مانند نمونه رسم شده (الف)، در شکل‌های زیر نمونه‌ای از هر یک از وضعیت‌های مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید.



ب) رأس زاویه خارج دایره



الف) رأس زاویه روی دایره



د) رأس زاویه داخل دایره در نقطه‌ای غیر از مرکز

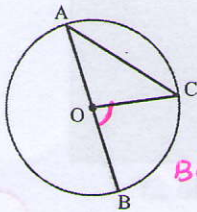


ج) رأس زاویه در مرکز دایره

در کدام وضعیت زاویه مرکزی نشان داده شده است؟ (ج)

به زاویه‌ای که در شکل «الف» مشاهده می‌کنید، زاویه محاطی گفته می‌شود. رأس این زاویه روی دایره است و ضلع‌های آن، دایره را قطع کرده‌اند.

زاویه محاطی



۲- اندازه زاویه مرکزی BOC را بر حسب \widehat{BC} بنویسید: $\widehat{BOC} = \widehat{BC}$

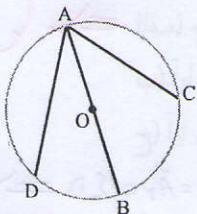
چرا زاویه‌های A و C در مثلث AOC با هم برابرند؟ $OA = OC$

چه ارتباطی میان زاویه BOC و این دو زاویه وجود دارد؟ $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{C}$

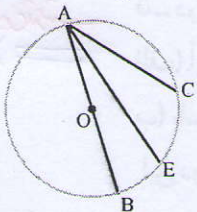
اندازه زاویه محاطی BAC را بر حسب \widehat{BC} بنویسید. $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

۳- با توجه به فعالیت قبل، با پر کردن جاهای خالی

اندازه زاویه محاطی DAC را بر حسب \widehat{DC} بنویسید.



$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2}$$



۴- با پر کردن جاهای خالی، اندازه زاویه محاطی EAC را هم بر حسب \widehat{EC} بنویسید.

$$\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE} = \frac{\widehat{BC}}{2} - \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{EC}}{2}$$

۵- پاسخ فعالیت‌های (۲)، (۳) و (۴) را با هم مقایسه کنید. آیا در این سه فعالیت، همه

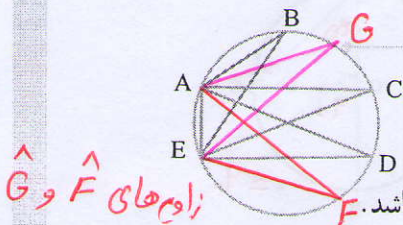
حالت‌های زاویه محاطی بررسی شده‌اند؟ عبارت زیر را کامل کنید. **بله**

اندازه هر زاویه محاطی برابر است با **نصف کمان مقابل به آن**

کار در کلاس



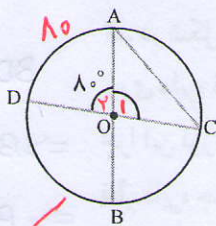
۱- با توجه به شکل روبه‌رو،



الف) زاویه‌های محاطی مقابل به \widehat{AE} را پیدا کنید. $\hat{D}, \hat{C}, \hat{B}$

ب) دو زاویه محاطی دیگر رسم کنید که \widehat{AE} کمان مقابل به آنها نیز باشد. **زاویه‌های \hat{F} و \hat{G}**

۲- در شکل روبه‌رو، اندازه زاویه محاطی C را تعیین کنید.



دو دانش‌آموز به این سؤال جواب داده‌اند.

راه‌حل‌های آنها را توضیح دهید. **کلامی**

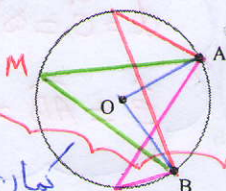
فاطمه
 $\hat{O} = 8^\circ \rightarrow \widehat{AD} = 8^\circ$
زاویه مرکزی \widehat{AD} مقابلش برابر است
 $\hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{8^\circ}{2} = 4^\circ$
زاویه محاطی \widehat{AD} مقابلش
به آن می‌باشد

زهرا
 $\hat{O}_1 = 180^\circ - 8^\circ = 172^\circ$
به کمان \widehat{AD} است
مجموع زاویه‌ها در هر مثلث 180° است
 $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ - 172^\circ = 8^\circ$
مثلث OAC متساوی الساقین است
 $\hat{A} = \hat{C} = \frac{8^\circ}{2} = 4^\circ$
زاویه $\hat{C} = 4^\circ$ است

فعالیت



۱- یک زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.



سه زاویه محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید.

فکر می‌کنید چند زاویه دیگر می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

آیا همه این زاویه‌های رسم شده با هم برابرند؟ چرا؟

بله، زیرا هر چند روی یک کمان می‌باشند پس نصف کمان AB می‌باشند

۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.

اندازه هر کمان چند درجه است؟ چرا؟ 180°

چند زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

چند زاویه محاطی می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

اندازه این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

نود (۹۰) درج زیرا نصف کمان مقابلش می‌باشند

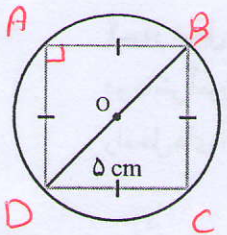
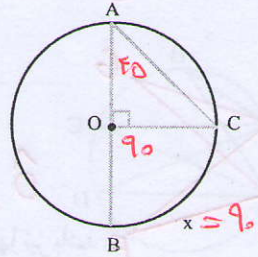
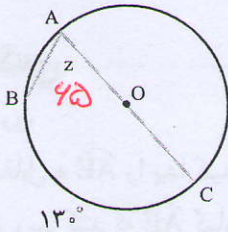
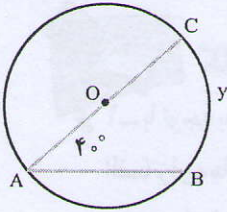
$\widehat{AB} = 180^\circ \Rightarrow \text{زاویه محاطی مقابل به آن} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

کار در کلاس



۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های خواسته شده را پیدا کنید.

$y = 10$



۲- در شکل روبه‌رو، همه رأس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی‌متر روی دایره قرار دارد.

$BD \text{ قطر} \Rightarrow \widehat{BD} = 180$

چرا این لوزی، مربع است؟

$\Rightarrow \hat{A} = \frac{180}{2} = 90$

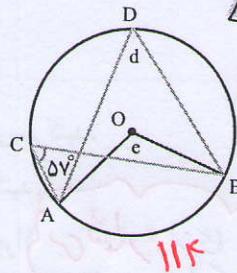
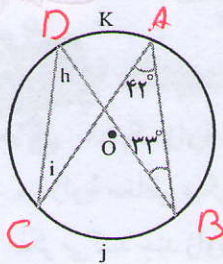
قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

$BD^2 = 5^2 + 5^2$
 $\Rightarrow BD = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2}$
 $\Rightarrow BD = 5\sqrt{2}$

لوزی که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد مربع است.



۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید.



$d = c = 57$
 $e = \widehat{AB} = 114$

۲- در شکل زیر زاویه مرکزی AOB برابر با ۷۲ درجه است. اندازه کمان AB چند درجه

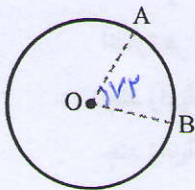
$\widehat{AB} = \hat{O} = 72$

است؟

اگر، دهانه پرگار را به اندازه AB باز کنیم و با شروع از نقطه B، بی‌دری کمان‌هایی بزنیم، به این ترتیب

چند کمان مساوی روی دایره جدا می‌شود؟

$360 \div 72 = 5$

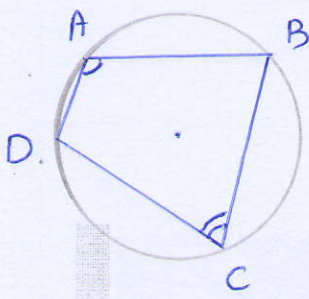


$j = 2 \times 57 = 114$

$h = \hat{A} = 57$

$k = 2 \hat{B} = 44$

$i = \hat{B} = 33$



$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \hat{C} &= \frac{\widehat{BAD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 180$$

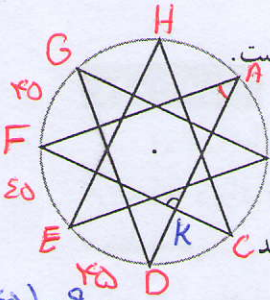
نتیجه: مجموع دو زاویه مقابل هر دو ضلعی مخالفی محاسبات برابر ۱۸۰ درجه است

$$360 \div 8 = 45$$

$$\hat{A} = \frac{FD}{2} = 45$$

$$\hat{F} = 45$$

$$K = 180 - (45 + 45) = 90$$



۳- در شکل روبه‌رو، دایره‌ای به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است.

الف) شکل چند خط تقارن دارد؟ **۱ خط تقارن**

ب) اندازه دو زاویه مشخص شده روی شکل را پیدا کنید و بنویسید.

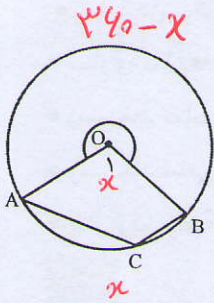
$$\hat{A} = 45 \text{ و } K = 90$$

۴- دایره‌ای بکشید. سپس، چهارضلعی ABCD را طوری رسم کنید

که هر چهار رأس آن روی دایره باشد.

چرا مجموع دو زاویه روبه‌رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر ۱۸۰ درجه است؟

بالا



۵- در شکل روبه‌رو اندازه کمان AB برابر x درجه است.

الف) اندازه زاویه O₁ را بر حسب x بنویسید. **x درجه**

ب) اندازه کمان قرمز رنگ را بر حسب x بنویسید. **360 - x**

ج) اندازه زاویه C را بر حسب x بنویسید.

$$\hat{C} = \frac{360 - x}{2} = 180 - \frac{x}{2}$$

۶- در شکل زیر، پره‌ها دوازده کمان مساوی روی محیط چرخ ایجاد کرده‌اند.

شعاع چرخ ۳۰ سانتی متر است.

$$360 \div 12 = 30$$

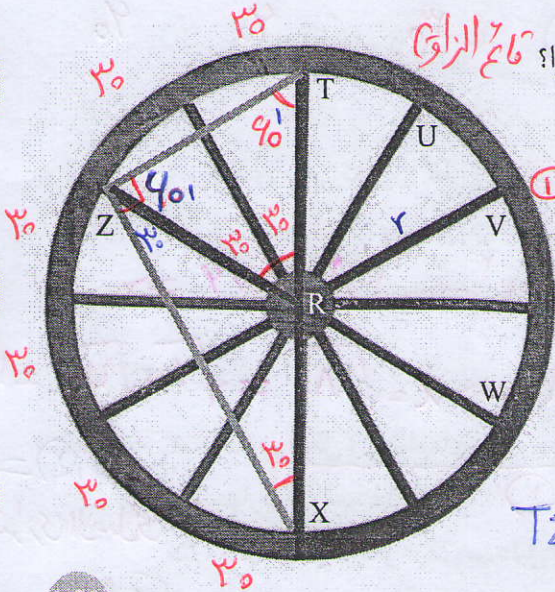
الف) طول TX چقدر است؟ **۴۰ cm (قطر دایره)**

ب) مثلث ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ **مساوی الاضلاع**

ج) طول ZT چقدر است؟ **۴۰ cm**

د) مثلث XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ **مخالف الزاویه**

ه) طول ZX چقدر است؟



$$\hat{T}_1 = \hat{Z}_1 = \widehat{TRZ} = 40 \Rightarrow$$

مثلث TRZ مساوی الاضلاع است

$$\Rightarrow TZ = r = 30 \text{ cm}$$

$$\widehat{TZX} = \frac{TX}{r} = \frac{180}{2} = 90 \text{ (چون TX قطر است)}$$

$$\Rightarrow ZX^2 = TX^2 - TZ^2 \Rightarrow ZX^2 = 40^2 - 30^2 = 3600 - 900$$

$$\Rightarrow ZX = \sqrt{2700} = \sqrt{9 \times 100 \times 3} = 30\sqrt{3}$$

$$P = 180 - 25 = 155$$

●●●●● مرور فصل ۹ ●●●●●

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند، مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بنویسید.

- خط مماس
- زاویه مرکزی
- زاویه محاطی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

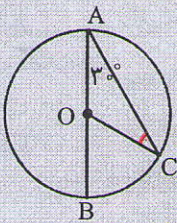
- پیدا کردن مرکز دایره
- تساوی کمان‌ها و وترهای متناظر
- رسم خط مماس بر دایره
- رسم چندضلعی منتظم به کمک زاویه مرکزی
- پیدا کردن زاویه محاطی با توجه به کمان روبه‌روی آن

کاربرد

رسم چندضلعی‌های منتظم به کمک مفاهیم زاویه مرکزی یکی از کاربردهای مهم این درس در طراحی شکل‌های تزئینی و معماری است.

تمرین‌های ترکیبی

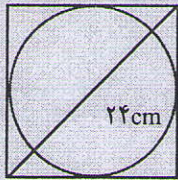
۱- با توجه به شکل روبه‌رو، اندازه زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.



$\hat{C} = 30^\circ, \hat{COB} = 40^\circ, \widehat{BC} = 40^\circ$

$\hat{COB} = \hat{A} + \hat{C}$

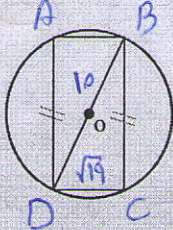
۲- کاغذی مربعی شکل به قطر ۲۴ سانتی‌متر داریم. مطابق شکل، بزرگ‌ترین دایره‌ای را که می‌توانستیم روی آن رسم کردیم. قطر این دایره را حساب کنید.



$x^2 + x^2 = 24^2 \Rightarrow 2x^2 = 576 \Rightarrow$

$x^2 = 288 \Rightarrow x = \sqrt{288} = \sqrt{2} \times \sqrt{144} = 12\sqrt{2}$

اضلاع
چهارضلعی متوازی
است



۳- الف) در شکل زیر ضلع‌های روبه‌رو به هم در چهارضلعی با هم برابرند.

چرا چهارضلعی مستطیل است؟ $A = \frac{BD}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (۳)

ب) شعاع دایره برابر ۵ و عرض مستطیل برابر $\sqrt{19}$ سانتی‌متر است.

طول مستطیل را به دست آورید.

ABCD مستطیل است \Rightarrow (۱), (۲)
است زیرا متوازی الاضلاع
که زاویه قائم دارد مستطیل است

$BC^2 = 10^2 - \sqrt{19}^2 \Rightarrow BC^2 = 100 - 19 = 81$
 $\Rightarrow BC = \sqrt{81} = 9$